



Méthode de résolution du M4-5n par éléments finis mixtes pour l'analyse des chaussées avec discontinuités

Hanan Nasser

► **To cite this version:**

Hanan Nasser. Méthode de résolution du M4-5n par éléments finis mixtes pour l'analyse des chaussées avec discontinuités. Génie civil. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2016. Français. <tel-01529735>

HAL Id: tel-01529735

<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01529735>

Submitted on 31 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Hanan NASSER

*Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de Docteur de l'École Centrale de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architectures

Discipline : Génie Civil

Unité de recherche : Institut Français des Sciences et Technologies des Transports de l'Aménagement et des Réseaux

Soutenue le 13 décembre 2016

Méthode de résolution du M4-5n par éléments finis mixtes pour l'analyse des chaussées avec discontinuités

JURY

Président : **Nicolas MOËS**, Professeur, Ecole Centrale de Nantes

Rapporteurs : **Alain EHRLACHER**, Professeur, Ecole des Ponts Paris Tech
Christophe PETIT, Professeur des universités, Université de Limoges

Examineurs : **Yann LEFEUVRE**, Docteur, COLAS, Magny les Hameaux

Directrice de thèse : **Armelle CHABOT**, Directrice de Recherche, IFSTTAR, Centre de Nantes

Co-encadrant de thèse : **Olivier CHUPIN**, Chargé de Recherche, IFSTTAR, Centre de Nantes

Remerciements

Cette thèse a été effectuée au Laboratoire Auscultation, Modélisation, Expérimentation des infra-Structures de transport (LAMES) de l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR) situé à Nantes. J'aimerais exprimer en avant-propos les remerciements adressés à la Région Pays de la Loire pour le co-financement et à l'ensemble des personnes ayant contribué à l'aboutissement de ce travail de thèse.

Mes premiers remerciements vont à ma directrice de thèse Armelle CHABOT, Directrice de Recherche au LAMES, qui m'a dirigé tout au long de cette thèse. Ce travail n'aurait jamais pu aboutir sans son aide, son suivi, ses conseils judicieux et son soutien pendant toute la durée de cette thèse. Je remercie Olivier CHUPIN et Jean-Michel PIAU, chercheurs au LAMES, d'avoir accepté encadrer une partie de cette thèse et avoir mis à ma disposition tout le temps et le matériel nécessaires au bon déroulement de ce travail permettant ainsi la réalisation et l'amélioration de ce manuscrit, et ceci avec une toute particulière sympathie.

Je tiens à remercier Alain EHRLACHER, Professeur de l'Ecole des Ponts Paris Tech, ainsi que Christophe PETIT, Professeur de l'Université de Limoges, d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter cette thèse. Toute ma gratitude s'adresse également à Yann LEFEUVRE, Docteur ingénieur chez COLAS, qui m'a fait l'honneur de participer au jury de cette thèse. J'y associe Nicolas MOËS, Professeur de l'Ecole Centrale de Nantes qui m'a fait l'honneur de présider mon jury.

Mes remerciements s'adressent aussi à tout le personnel de l'IFSTTAR et aux thésards pour leur accueil chaleureux, leur aide au quotidien, leur sympathie, leur bonne humeur et pour la bonne ambiance.

Mon travail durant cette thèse n'aurait pas été aussi fructueux sans l'aide et le courage précieux de mes parents, ma sœur et de toute ma famille ainsi que de mes amis. Pour cela, je les remercie tous pour le soutien et le courage qu'ils m'ont donnés.

Résumé

Les chaussées subissent des sollicitations liées au trafic et au climat conduisant à leur dégradation, par fissuration notamment. Il est nécessaire dans le contexte actuel de pouvoir modéliser le comportement de ces structures multicouches endommagées afin de prévoir leur durée de vie résiduelle ou dimensionner des solutions de renforcement. L'objectif de la thèse est ainsi de proposer un outil de calcul dédié à l'analyse 3D des chaussées fissurées ou comportant des discontinuités.

L'approche retenue repose sur la modélisation simplifiée d'une chaussée par un empilement de plaques du Modèle Multi-particulaire des Matériaux Multicouches à 5n équations d'équilibre (M4-5n). Un outil de calcul rapide de référence de chaussées 2D fissurées et une méthode de résolution générale du M4-5n par Eléments Finis mixtes sont développés. Le point de départ de la méthode de résolution est l'écriture, pour le M4-5n, du principe variationnel basé sur le théorème de l'énergie complémentaire où la condition de contraintes statiquement admissibles est assurée à partir de multiplicateurs de Lagrange. La discrétisation des efforts généralisés utilise des espaces d'interpolation permettant le bon conditionnement du système d'équations algébriques à résoudre et garantissant la stabilité de la solution. La méthode est implémentée dans FreeFem++. Elle ramène le problème 3D initial à une modélisation EF 2D et conduit à des valeurs finies des efforts généralisés au niveau des fissures ou décollement d'interface.

L'outil de calcul final ainsi développé est validé et appliqué à l'étude de la réponse d'une structure fissurée, représentative d'une chaussée testée en vraie grandeur sur le site de l'IFSTTAR.

Mots clés : Chaussée, Structure Multicouche, M4-5n, Eléments Finis Mixtes, Fissuration, Décollement



Table des matières

Remerciements	i
Résumé	iii
Introduction	1
1 Bibliographie sur le comportement mécanique des chaussées	5
1.1 Composition d'une structure de chaussée et de ses différents matériaux	5
1.2 Les structures de chaussées françaises	7
1.2.1 Chaussées classiques	7
1.2.2 Structures composites inverses	9
1.3 Les causes de dégradation des chaussées	11
1.3.1 Effet du chargement lourd répété	11
1.3.2 Effet de l'environnement	12
1.3.3 Fissuration dans les chaussées	14
1.4 Avantages et inconvénients des différents modèles de chaussées	15
1.5 Bilan	19
2 Revue des modèles existants prenant en compte des discontinuités	21
2.1 Généralités sur la fissuration dans un matériau	21
2.2 Généralités sur le décollement entre couches des matériaux	23
2.3 Méthodes numériques pour modéliser les structures fissurées	24
2.3.1 Méthodes classiques des éléments finis (FEM)	24
2.3.2 Méthodes non basées sur les éléments finis	26
2.3.3 Méthodes basées sur la partition de l'unité	26
2.3.4 Méthodes numériques de traitement du contact	27
2.3.5 Thick level Set (TLS)	28
2.4 Le Modèle Multi-particulaire des Matériaux Multicouches : M4-5n	29
2.4.1 Introduction des modèles multiparticulaires	29
2.4.2 Formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner	31
2.4.3 Construction du M4-5n	33
2.4.4 Equations du M4-5n	34
2.5 Conclusion	43

Bilan général et Objectifs de la thèse	44
3 Construction d'un outil de calcul 2D de référence de chaussées fissurées - Résolution du M4-5nW par la méthode aux différences finies (DF)	49
3.1 Modélisation du sol	49
3.2 Résolution numérique du M4-5n par la méthode aux Différences Finies (DF)	52
3.3 Application de l'outil 2D finalisé sur la modélisation d'une chaussée composite mixte	55
3.3.1 Détermination de la longueur du quadricouche retenu	56
3.3.2 Détermination de l'épaisseur de la couche de cisaillement	57
3.4 Application au cas d'une chaussée mixte fissurée	61
3.4.1 Validation par rapport aux éléments finis	62
3.4.2 Analyse d'une chaussée soumise à un chargement roulant	65
3.5 Bilan	66
4 Développement numérique de l'outil de calcul 3D – Résolution générale du M4-5nW par la méthode des éléments finis mixtes (EFM)	69
4.1 Théorème de l'énergie complémentaire et formulation d'Hellinger-Reissner	70
4.2 Formulation mixte du M4-5n	71
4.2.1 Calcul de la densité d'énergie élastique en contraintes du M4-5n	71
4.2.2 Rappel de la formulation forte du problème	73
4.2.3 Application du théorème de l'énergie complémentaire avec utilisation des multiplicateurs de Lagrange	75
4.2.4 Equivalence de la stationnarité du Lagrangien avec la formulation forte	77
4.3 Disrétisation EF de la formulation mixte	81
4.4 Aménagement de la formulation en vue de la modélisation EF des chaussées	85
4.4.1 Prise en compte des ressorts du M4-5nW	85
4.4.2 Prise en compte des conditions aux limites en efforts par pénalisation	85
4.4.3 Adimensionnalisation des champs mécaniques	85
4.4.4 Prise en compte de fissures verticales ou de décollements d'interfaces	86
4.4.5 Réduction des modèles par symétrie et antisymétrie	87
4.5 Implémentation dans FreeFem++	88
4.6 Conclusion	91
5 Validation du M4-5nW résolu à l'aide d'éléments finis mixtes (EFM) par rapport à la méthode aux différences finies (DF) et à une solution analytique de plaque	93
5.1 Validation de l'outil M4-5nW EFM sur un bicouche non fissuré - Cas 2D déformations planes	93
5.2 Validation de l'outil M4-5nW EFM sur un bicouche fissuré - Cas 2D déformations planes	105
5.3 Validation de l'outil M4-5nW EFM sur l'exemple d'une plaque en flexion	110
5.4 Conclusion	120

6	Apport de l'approche M4-5nW résolu à l'aide d'éléments finis mixtes (EFM) sur un exemple de chaussée réelle	123
6.1	Présentation de la machine FABAC	123
6.2	Présentation du FWD	125
6.3	Description de l'essai	126
6.3.1	Chaussée testée, instrumentation et modalité de chargement	126
6.3.2	Campagnes d'auscultation FWD	128
6.4	Application de l'outil de calcul M4-5nW EFM à l'essai	129
6.4.1	Mise en données du problème	129
6.4.2	Matériaux	129
6.4.3	Conditions limites du modèle non fissuré	130
6.4.4	Prise en compte des chargements FWD pour un pas de mesure	131
6.4.5	Prise en compte de fissures transversale et longitudinale à mi-essai	131
6.4.6	Comparaison des résultats du M4-5nW EFM avec les mesures de déflexion FWD	132
6.5	Conclusion	135
	Conclusion et Perspectives	135
	Bibliographie	153
	Annexes	153
A	Détails des calculs M4-5nW de la chaussée 2D de référence résolue par la méthode aux différences finies	155
A.1	Ecriture du système par couche	157
A.2	Ecriture du système global	159
A.3	Adimensionnalisation du système global	162
A.4	Discrétisation du système par la méthode de Newmark	163
A.5	Introduction des conditions aux limites type fissure verticale	168
A.6	Obtention des inconnues secondaires	171
B	Calcul des matrices nécessaires pour la résolution par la méthode des différences finies : cas 2D de référence	173
B.1	Matrices du système général à résoudre	173
B.2	Matrices des conditions limites	178
B.3	Maillage pour scilab	181

Introduction

Les réseaux routiers, réseaux sociaux parmi d'autres, contribuent à l'attrait économique et touristique des pays et font partie du patrimoine des nations. Le réseau français dont la valeur est estimée à 2 000 milliards d'euros est composé aujourd'hui d'environ un million de kilomètres : 20 000 km appartiennent à l'Etat, 375 000 km relèvent des départements, et plus de 600 000 km sont gérés par les communes (IDRRIM, 2016b). Néanmoins ces structures de chaussées sont aujourd'hui anciennes et atteignent leur limite de durée de vie. L'une des priorités des gestionnaires routiers est donc de garantir leur entretien dans un contexte budgétaire de plus en plus contraint.

Dans ce cadre, l'une des missions de l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR) au coté de la profession routière est de développer les outils techniques permettant d'évaluer l'état des chaussées en place, de prévoir leur durée de vie résiduelle et de dimensionner les solutions de renforcement. Nos travaux s'inscrivent dans cette perspective en venant compléter les approches usuelles de dimensionnement ou d'expertise des chaussées qui ne tiennent pas compte explicitement de la présence de dommages (LCPC-SETRA, 1994), (Corté and Goux, 1996). De manière générale, ils ont pour premier objectif d'appréhender le comportement mécanique, à échelle locale (par opposition à l'échelle d'un réseau routier), de chaussées endommagées comportant des fissures ou des surfaces de décollement. A plus long terme, ils doivent permettre de prendre en compte l'évolution de ces dommages pour aider à l'évaluation de la durée de vie des réseaux routiers en absence ou en présence de travaux d'entretien (IDRRIM, 2016a). Les travaux rapportés dans ce mémoire portent sur le premier volet. Ils visent à développer une méthode de calcul de multicouches élastiques avec discontinuités, susceptibles de représenter le comportement de structures de chaussées fissurées. Il est à noter que ces développements peuvent également servir à l'expertise des chaussées comportant des joints de construction (ex : chaussées rigides, mixtes ou composites).

Notre approche est basée sur l'utilisation de l'un des "Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4)" qui ont été initialement développés à l'ENPC pour étudier les effets de bord et la délamination dans les matériaux à structures composites (Chabot, 1997), (Naciri et al., 1998), (Chabot and Ehrlacher, 1998).

Le M4 choisi dans ce travail, bien approprié à la modélisation des chaussées en flexion sous charges de trafic, contient cinq champs cinématiques par couche et est noté à ce titre M4-5n (n représentant le nombre total de couches). A ces champs correspondent des champs de contraintes généralisés de

couches et d'interfaces conduisant au final à un problème s'exprimant uniquement en fonction des coordonnées (x,y) des plans médians des couches et permettant donc de gagner une variable d'espace par rapport aux modèles 3D usuels. Un deuxième avantage procuré par l'utilisation de ce modèle est la valeur bornée des champs de contraintes généralisées en extrémité de fissures qui facilite l'analyse des champs mécaniques au voisinage des discontinuités et la formulation de critères de propagation de fissures.

Ce mémoire est divisé en six chapitres :

Le **premier chapitre** rappelle un certain nombre d'éléments bibliographiques sur la conception des chaussées, sur leurs différents modes de sollicitation (trafic, climat) et sur les modèles de calcul usuels de chaussées. Le bilan fait ressortir le besoin d'une prise en compte explicite des discontinuités pour étudier les structures de chaussée dégradées et prévoir leur évolution.

Le **deuxième chapitre** constitue une revue des modèles existants pouvant intégrer de façon générale la présence de discontinuités au cœur de solides ou à l'interface entre deux matériaux. Parmi ces modèles figure le M4-5n que nous présentons en détail.

Le **troisième chapitre** présente la finalisation que nous avons effectuée d'un certain nombre de travaux antérieurs à cette thèse permettant d'aboutir à un outil de référence de résolution par différences finies du M4-5n en déformations planes (discrétisation linéique) appliqué au domaine des chaussées. Une modélisation du sol alternative à celle retenue dans la thèse de (Tran, 2004) (modèle de Boussinesq) est proposée avec un certain nombre d'avantages sur la base d'une combinaison d'une couche de M4-5n et de ressorts de Winkler (W). Au total, le code développé et implémenté dans Scilab permet de modéliser une structure à 4 couches sur ressorts de Winkler.

Le **quatrième chapitre** présente le développement d'une méthode d'éléments finis pour la résolution des équations du M4-5n en 3D (discrétisation 2D) que nous avons jugée pour ce faire plus générale et systématique que la méthode des différences finies utilisée en déformations planes. Nous avons fait choix par ailleurs d'une méthode d'éléments finis mixtes qui découle naturellement du procédé de construction du M4-5n. Basée sur le théorème du maximum de l'énergie complémentaire, notre approche utilise les multiplicateurs de Lagrange pour imposer la condition de champs statiquement admissibles. On aboutit à une formulation mixte de type Hellinger-Reissner exprimée en champs généralisés. La fonctionnelle est introduite dans le logiciel d'éléments finis FreeFem++ (Hecht, 2011) à haut niveau de langage qui permet de s'affranchir de la programmation "fastidieuse" des étapes de discrétisation et de résolution. Une attention particulière est néanmoins portée sur le choix des espaces fonctionnels d'interpolation des différents champs afin d'assurer le bon conditionnement du système discrétisé. Nous détaillons également dans ce chapitre le traitement des conditions aux limites en contraintes et déplacements généralisés sur les surfaces de fissuration et de décollement ainsi que sur les plans de symétrie.

Le **cinquième chapitre** établit la validité de la méthode et du script FreeFem++ sur deux cas : i) celui d'un bicouche en déformations planes avec et sans fissure reposant sur des ressorts de Winkler et calculé par ailleurs par le code aux différences finies développé au chapitre 3 ; ii) celui d'une plaque en flexion avec solution analytique que l'on modélise par un bicouche M4-5n homogène. Ce deuxième cas permet de valider la méthode en 3D (discrétisation 2D).

Le **sixième chapitre** illustre l'application de l'outil EF à l'étude de la réponse d'une chaussée réelle instrumentée construite sur le site de l'IFSTTAR (Nantes) et soumise à un essai de fatigue par l'une des machines FABAC d'essais accélérés. La structure a fait l'objet d'auscultations avant et après fatigue par mesures FWD (Falling Weight Deflectometer) à pas serrés qui mettent en évidence une évolution des profils de déflexion sous la charge. Grâce à la facilité de réalisation d'études paramétriques par l'outil EF développé, nous avons pu envisager différents scénarios de calcul (charge mobile, forme et localisation de la fissure, etc) permettant de reproduire les résultats expérimentaux et d'en donner une interprétation.

La **conclusion générale** synthétise les principaux résultats de la thèse et dresse les perspectives *a priori* prometteuses aux travaux de recherche réalisés vis à vis des enjeux soulevés par la gestion du patrimoine routier.

Chapitre 1

Bibliographie sur le comportement mécanique des chaussées

Ce chapitre rend compte des principaux éléments bibliographiques du comportement mécanique des chaussées. La composition générale d'une structure de chaussée et ses différents matériaux sont d'abord rappelés. Les structures types françaises telles que les chaussées classiques et les structures composites inverses sont décrites. Puis les différentes sollicitations agissantes sur ces structures et pouvant les endommager sont succinctement présentées. Les avantages et inconvénients des différents modèles de calculs de chaussées sont alors donnés. Le bilan résume la limitation de ces modèles pour l'analyse mécanique des chaussées fissurées et liste, malgré leurs limitations, quelques modèles et logiciels utilisés en France pour l'analyse du comportement de ces chaussées dégradées.

1.1 Composition d'une structure de chaussée et de ses différents matériaux

De l'époque romaine à nos jours l'homme a toujours voulu construire des routes pour le développement de son économie et de sa culture. Le chemin multier (route de 1ère génération), la route romaine (route de deuxième génération) et le macadam (route de troisième génération) étaient des structures généralement conçues sur une base empirique et ne possèdent pas de méthode de dimensionnement explicites.

Avec la forte augmentation du trafic lourd pendant les années 1960, les chaussées classiques se sont révélées insuffisantes pour le supporter. La solution a été de vouloir faire des chaussées à couches d'enrobés bitumineux plus épaisses ou des structures utilisant du béton de ciment ou des couches de granulats calibrés et traités. Ces nouvelles structures dites de "4ème génération" ont nécessité de nouvelles méthodes de conception. Dans le même temps, l'idée de définir les exigences des matériaux des chaussées pour limiter les variations dans leur performance mécanique à des niveaux raisonnables a émergée (Corté and Goux, 1996).

Ainsi le catalogue des chaussées françaises et sa méthode de dimensionnement (LCPC-SETRA, 1994)

1.1. COMPOSITION D'UNE STRUCTURE DE CHAUSSÉE ET DE SES DIFFÉRENTS MATÉRIEAUX

(SETRA-LCPC, 1997) indiquent qu'une chaussée est une structure multicouche travaillant essentiellement en flexion sous l'action du passage répété de charges lourdes. Cette structure est constituée de trois parties principales qui ont chacune un rôle bien défini (Figure 1.1).

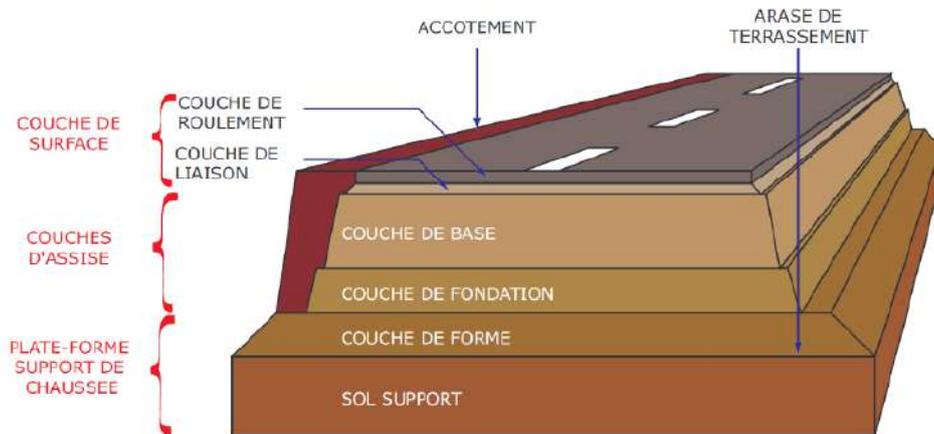


FIGURE 1.1 – Schéma structural d'une chaussée (LCPC-SETRA, 1994)

Le sol-support est surmonté généralement d'une couche de forme. L'ensemble sol-couche de forme représente la plate-forme support de la chaussée. La couche de forme a une double fonction :

- pendant les travaux, elle assure la protection du sol-support et permet la qualité du nivellement ainsi que la circulation des engins.
- en service, elle permet d'homogénéiser les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant le sol ou le remblai, et d'améliorer la portance à long terme.

La couche de base et la couche de fondation forment les couches d'assise. Ces dernières apportent à la chaussée la résistance mécanique aux charges verticales induites par le trafic lourd répété des véhicules et répartissent les pressions sur la plate-forme support afin de maintenir les déformations à un niveau admissible.

La couche de surface se compose de la couche de roulement et éventuellement d'une couche de liaison entre la couche de roulement et les couches d'assise. Elle a deux fonctions :

- elle est censé assurer la protection des couches d'assise vis-à-vis des infiltrations d'eau
- elle confère aux usagers un confort de conduite d'autant plus satisfaisant que les caractéristiques de surface sont bonnes.

Les chaussées utilisent ainsi différentes couches de matériaux dont les caractéristiques sont utilisées en fonction de leur usage dans la structure. Le guide technique français de conception et dimensionnement des structures de chaussée (LCPC-SETRA, 1994) définit cinq catégories de matériaux de chaussée qu'on peut classer en trois grandes familles. Tous les matériaux sont fabriqués à partir d'une composition granulaire bien définie.

- **les matériaux granulaires non liés** sont réunis par la norme NF EN 13285 (norme française NF P 98-129) sous l'appellation Graves Non Traitées (GNT). Ils sont fréquemment utilisés pour la réalisation du corps des chaussées à faible trafic en couche de fondation. Ils ont un comportement élastique non linéaire (Hornych et al., 2007) (Hornych, 2008)
- **les matériaux noirs** (en référence à la couleur du liant) regroupent les matériaux traités aux liants hydrocarbonés à chaud (souvent désigné matériaux bitumineux) suivant les normes NF EN 13108-1 à NF EN 13108-8 et les matériaux traités à l'émulsion du bitume (autrement désigné matériaux bitumineux à froid) suivant la norme NF P 98-121. Leur comportement viscoélastique et thermosusceptible dépend fortement du type de pourcentage de liant bitumineux utilisé, du type de granulat, de la courbe granulaire souhaitée et de leur pourcentage de vide (Huet, 1963), (Sayegh, 1963), (Sayegh, 1965), (Huet, 1999), (Corté and Di Benedetto, 2005), (Di Benedetto and Corté, 2005). Leur étude en fatigue (Lefeuvre, 2001), (Bodin, 2002) est réalisée en France à l'aide des essais trapézoïdaux selon la norme NF EN 12697-26.
- **les matériaux blancs** regroupent les matériaux traités aux liants hydrauliques NF EN 14227-1 à NF EN 14227-5 et les bétons de ciment NF P 98-170. De même, ces matériaux considérés élastiques voient leur propriétés mécaniques définies en fonction du type de liant hydraulique et granulats utilisés (Sedran and De Larrard, 2000).

1.2 Les structures de chaussées françaises

L'une des caractéristiques du réseau routier français est l'existence d'une grande diversité de structures de chaussée. Selon les matériaux granulaires liés (enrobés, béton, etc) ou non liés composants les couches des chaussées, plusieurs structures types sont définies. Dans ce paragraphe, nous relatons deux types de chaussées : les chaussées classiques et les structures composites inverses (LCPC-SETRA, 1994).

1.2.1 Chaussées classiques

Les chaussées classiques françaises sont classées selon les familles suivantes : les chaussées souples, les chaussées bitumineuses épaisses, les chaussées à assise traitée aux liants hydrauliques, les chaussées à structure mixte, les chaussées à structure inverse, les chaussées en béton de ciment. Le présent paragraphe rapporte les éléments principaux donnés dans le guide de dimensionnement des chaussées (LCPC-SETRA, 1994).

- **Les chaussées souples** comportent une couverture bitumineuse relativement mince, inférieure à 15 cm, parfois réduite à un enduit pour les chaussées à très faible trafic, reposant sur une ou plusieurs couches de matériaux granulaires non liés. L'épaisseur de ces couches en GNT varie de 20 à 50 cm, selon le trafic. Pour le dimensionnement, les couches sont considérées collées entre elles.

- **Les chaussées bitumineuses épaisses** se composent d'une couche de roulement bitumineuse sur un corps de chaussée en matériaux traités aux liants hydrocarbonés, fait d'une ou deux couches (base et fondation) (Figure 1.1). L'épaisseur des couches d'assise est le plus souvent comprise entre 15 et 40 cm. Les contraintes verticales transmises au sol support sont faibles car atténuées par leur diffusion importante dans les couches d'assises liées. Celles-ci reprennent donc la charge des véhicules lourds en termes de traction en base de leur couche par flexion de la structure globale. Selon la qualité de l'interface, entre les couches d'assises, la déformation horizontale maximale est située à la base de la couche la plus profonde (collage parfait) ou à la base de chacune des couches (glissement parfait). Pour le calcul des chaussées neuves, un collage parfait est considéré. Le dimensionnement de ces chaussées prend en compte, par le type de trafic considéré, la fatigue par flexion de ces matériaux bitumineux.
- **Les chaussées à assise traitée aux liants hydrauliques (semi-rigides)** comportent une couche de roulement bitumineuse sur une assise en matériaux traités aux liants hydrauliques disposés en une ou deux couches (base et fondation) dont l'épaisseur totale est de l'ordre de 20 à 50 cm. Grâce à leur grande rigidité, ces structures permettent de ne transmettre que des efforts verticaux très faibles au sol support. Par contre, elles sont elle-même soumises à des contraintes de traction-flexion importantes. La structure est modélisée en considérant un collage parfait entre la couche de roulement et la couche de base et entre la couche de fondation et le sol support. En revanche, la liaison entre la couche de base et la couche de fondation dépend de la nature du liant, elle peut être soit collée, soit décollée, soit intermédiaire (moyenne des cas collés et décollés). Ces structures sont utilisées sur les réseaux importants, notamment sur le réseau routier national. Par retrait des matériaux aux liants hydrauliques, la durabilité nécessite de prendre en compte les remontées de fissure de ces couches vers le haut de la chaussée.
- **Les chaussées à structure mixte** comportent une couche de roulement et une couche de base en matériaux bitumineux sur une couche de fondation en matériaux traités aux liants hydrauliques. Les structures qualifiées de mixtes sont telles que le rapport de l'épaisseur de matériaux bitumineux à l'épaisseur totale de chaussée soit de l'ordre de 1/2. Alors que la couche de fondation sert à atténuer et à diffuser les contraintes transmises au sol support grâce à sa grande rigidité, la couche de base en matériaux traités aux liants hydrocarbonés, grâce à son épaisseur, a pour fonction de ralentir la remontée de la fissuration transversale (par retrait du matériau) de la couche inférieure en matériaux traités aux liants hydrauliques. Lors du calcul de ces structures, on considère deux phases : initialement toutes les couches sont collées entre elles, et lors de la seconde phase de fonctionnement, l'interface entre la couche de base et la couche de fondation est glissante. Ces chaussées peuvent supporter un trafic conséquent, mais sont moins utilisées que les précédentes.
- **Les chaussées à structure inverse** sont formées de couches bitumineuses, d'une quinzaine de centimètres d'épaisseur totale, sur une couche en grave non traitée (d'environ 12 cm) reposant elle-même sur une couche de fondation en matériaux traités aux liants hydrauliques qui joue

également le rôle de couche de fondation. L'épaisseur totale atteint 60 à 80 cm. Toutes les interfaces sont supposées collées. Ces structures sont faiblement utilisées, même si elles peuvent théoriquement supporter un trafic important.

- **Les chaussées en béton de ciment** comportent une couche d'assise en béton de ciment de 15 à 40 cm d'épaisseur éventuellement recouverte d'une couche de roulement mince en matériaux bitumineux. La couche de béton constituée en dalles repose soit sur une couche de fondation (qui peut être en matériaux traités aux liants hydrauliques, en béton de ciment, ou drainante non traitée), soit directement sur le support de chaussée avec, dans ce cas, interposition fréquente d'une couche bitumineuse. La dalle de béton peut être supposée continue avec un renforcement longitudinal (Béton Armé Continu ou BAC), ou discontinue avec ou sans éléments de liaison aux joints.

1.2.2 Structures composites inverses

Les évolutions des techniques routières ont amélioré les performances des chaussées en les rendant plus durables et plus sûres. Vers la fin des années 1990 de nouveaux types de chaussées ont été développés répondant aux exigences en matière d'écologie en diminuant le prélèvement en matériaux naturels. Pour l'utilisation des matériaux à liants hydrauliques les chaussées composites, qui permettent de réduire significativement les épaisseurs des structures, vont dans ce sens (CIMbéton, 2009). Une chaussée composite est une structure utilisant un revêtement béton (éventuellement armé continu) mis en œuvre sur un matériau bitumineux et recouvert éventuellement d'un béton bitumineux très mince (BBTM). Ce mélange des techniques permet de tirer profit des qualités de durabilité du béton de ciment et de la souplesse des produits bitumineux. Dans ce paragraphe, nous présentons deux concepts de chaussées composites inverses : le Béton Armé Continu sur le Grave Bitume (BAC/GB) et le Béton de Ciment Mince Collé (BCMC).

- **Le Béton Armé Continu sur Grave Bitume (BAC/GB)** est un concept qui repose sur le principe de l'utilisation optimale des qualités mécaniques intrinsèques des matériaux et du collage durable du béton coulé pervibré sur un matériau bitumineux. La chaussée composite optimisée devient alors une structure bicouche, couche de roulement-base en béton armé continu et couche de fondation en grave-bitume. Cette structure peut être recouverte d'une couche de roulement en béton bitumineux très mince (BBTM)(CIMbéton, 2009). Pour le BAC, l'épaisseur minimale retenue est de 12 cm et elle varie en fonction du trafic. Le minimum technologique de mise en œuvre permettant le positionnement correct des armatures est actuellement de 10 cm. L'épaisseur minimale retenue est de 8 cm pour la GB (5 cm pour un BBSG). L'épaisseur maximale pour la mise en œuvre en une seule couche est de 14 cm.

Le collage à l'interface BAC/GB permet à la couche de grave-bitume de participer au fonctionnement mécanique de la structure en assurant le rôle d'une couche dimensionnante. Il a été étudié sur site réel dans le cadre d'expérimentations (IREX, 2000) avec ou sans des accélérateurs de trafic linéaire (machine FABAC)(Pouteau et al., 2006b). Les efforts de traction par flexion

induits par le trafic sont ainsi répartis sur deux couches traitées au lieu d'une seule. L'intérêt de cette structure de chaussée est de profiter de la présence de la couche de fondation traitée au bitume en tant que couche non érodable, pour l'intégrer à la structure et la faire travailler comme une couche de base dimensionnante. Cette structure est réellement composite avec une couche béton collée naturellement sur la couche de fondation en matériau bitumineux.

- Les structures en **Béton de Ciment Mince Collé (BCMC)** sur une couche bitumineuse sont conçues spécifiquement pour remédier durablement au problème d'orniérage des chaussées bitumineuses. En ce point, elles peuvent être utiles par exemple à l'urbain pour les aires de stationnement de bus (CIMbéton, 2004), (Hun, 2012). Ces structures s'utilisent indifféremment soit en travaux neufs à titre préventif, soit en travaux d'entretien à titre curatif. Cette technique, inspirée de celle développée par les Américains (Cole et al., 1998), est utilisée en France notamment pour l'urbain depuis fin 1996 (De Larrard et al., 2005). Le BCMC est une technique d'entretien superficiel des structures bitumineuses. Elle consiste à fraiser ou à raboter la structure bitumineuse dégradée sur une épaisseur adéquate et à mettre en œuvre, après nettoyage de la surface, une couche mince de béton de ciment (6 à 10 cm pour les chaussées routières construites sur des plateformes PF3) qui adhère parfaitement à la couche bitumineuse résiduelle sous-jacente.

Les joints sont sciés dans le béton jeune, sur environ le tiers de l'épaisseur, de façon à délimiter les dalles dont les dimensions sont de l'ordre de 15 à 20 fois l'épaisseur afin de minimiser le risque de fissuration en coin de dalle. L'ouverture des joints est limitée à des valeurs qui sont suffisamment faibles afin de prévenir une pénétration excessive d'eau ou d'autres agents agressifs. Du fait de la faible épaisseur de la couche de béton, il est impératif de rapprocher les joints dans le but de réduire l'ouverture des fissures aux droits des joints et d'éviter les effets de tuilage des dalles (Figure 1.2). Malgré le respect de toutes les règles de l'art en vigueur, des fissures risquent d'apparaître en particulier en coin de dalles comme déjà remarqué en France et autres pays comme les Etats-Unis (Pouteau, 2004) (Pouteau et al., 2006a) (Hun, 2012).

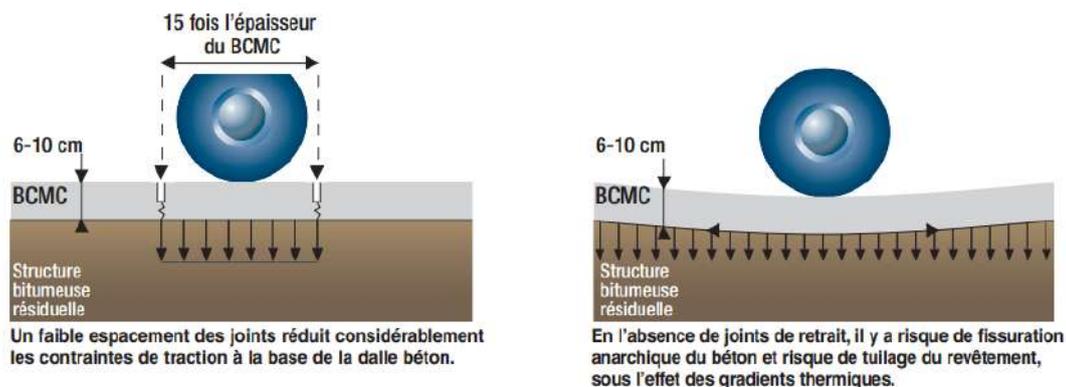


FIGURE 1.2 – Influence de l'espacement des joints sur le BCMC (CIMbéton, 2004)

1.3 Les causes de dégradation des chaussées

En vue, in fine, d'investiguer les problèmes de dégradation des chaussées fissurées, le présent paragraphe tente de relater brièvement les causes pouvant conduire en particulier à de telles dégradations.

Ainsi, pour construire des structures durables dans le temps, le dimensionnement d'une structure de chaussée routière consiste à déterminer la nature et l'épaisseur des couches qui la constituent afin qu'elle puisse résister aux diverses agressions auxquelles elle sera soumise tout au long de sa vie. La structure d'une chaussée routière doit résister notamment à diverses sollicitations, dont celles dues au trafic répété de charges lourdes et à l'environnement. Pour le protéger, elle doit assurer la diffusion des efforts induits par ce même trafic dans le sol de fondation. Ces sollicitations sont des causes probables de dégradation des chaussées essentiellement par déformation permanente conduisant à de l'orniérage (Sohm, 2011), (Sohm et al., 2012) et par endommagement (Bodin, 2002), (Bodin et al., 2004a), (Bodin et al., 2004b), (Bodin et al., 2016) conduisant à des mécanismes de fissuration ou de décollement entre couches de la structure multicouche.

1.3.1 Effet du chargement lourd répété

L'application d'une charge roulante induit une déformation en flexion des couches de la structure. Cette flexion entraîne des sollicitations en compression au droit de la charge en haut de couche et des sollicitations en traction à la base des couches d'enrobés (Figure 1.3). Le seul trafic qui intervient dans la détérioration des structures de chaussée étant celui des charges lourdes (type poids lourd, bus, avion, etc), c'est ce trafic qui doit être caractérisé en nombre de passage sur la chaussée pendant sa "durée de dimensionnement", et en agressivité de leurs essieux (LCPC-SETRA, 1994).

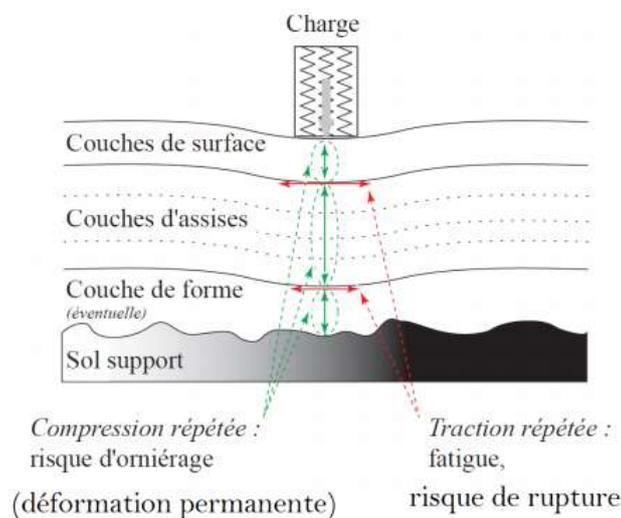


FIGURE 1.3 – Schéma de fonctionnement d'une structure de chaussée sous l'application d'une charge roulante (Di Benedetto and Corté, 2005)

Deux éléments perturbateurs conduisent à ce que les charges réelles qui s'exercent sur la chaussée

sont en réalité supérieures aux charges limites prescrites par la réglementation. Le premier est lié aux effets dynamiques qui apparaissent lorsque le véhicule est en mouvement. Certains de ces effets, tels que la surcharge des roues extérieures dans les virages, ou la surcharge des roues avant, lors du freinage sont considérés modérés alors qu'en réalité ils peuvent conduire à des dégradations à partir du haut de la structure (Hammoum et al., 2009). Les oscillations des véhicules liées aux défauts d'uni de la chaussée induisent des surcharges brèves, mais répétées, dont la valeur instantanée peut être du même ordre que la charge statique et conduire à doubler l'effort sur la chaussée (Imine, 2012). En fait, on ne sait guère prendre en compte ces effets dynamiques dans le calcul des chaussées. Ils sont intégrés de façon implicite dans les coefficients de sécurité des méthodes pratiques de dimensionnement.

Le calcul des efforts et des déformations s'effectue traditionnellement en considérant le modèle multicouche à matériaux considérés homogènes et isotropes, linéaires et élastiques de Burmister (Burmister, 1943). Ce modèle nécessite la détermination des valeurs équivalentes des modules d'Young et coefficients de Poisson des matériaux de chaque couche. Rappelons qu'en raison des propriétés viscoélastiques apportées par le bitume, les enrobés bitumineux ont un comportement (donc un module) fortement dépendant de la vitesse de chargement et également de la température. Dans un calcul de structure de chaussée, l'hypothèse d'un comportement élastique correspond à une approximation parfois non justifiée pour les matériaux bitumineux (Heck et al., 1998), (Heck, 2001), (Hammoum et al., 2010), (Chabot et al., 2010), (Chupin et al., 2010), (Chupin et al., 2013). En particulier, les effets des non-linéarités et des irréversibilités s'accumulent avec le nombre de cycles qui peut atteindre plusieurs millions dans la vie d'une chaussée (Bodin et al., 2004a) (Bodin et al., 2004b).

Ainsi l'agression mécanique des charges roulantes provoque des tassements et des flexions dans la structure routière. Leur répétition est à l'origine des phénomènes qui peuvent endommager et détruire les structures de chaussées tel que l'orniérage, l'arrachement des matériaux et la fissuration qui peut apparaître et se propager dans les matériaux ou à l'interface entre deux couches consécutives.

1.3.2 Effet de l'environnement

- **Effet de la température**

Les champs de contraintes et de déformations dans les matériaux bitumineux sont également fortement dépendants de la température (Di Benedetto and Corté, 2005) (Bodin et al., 2016). En effet, outre le vieillissement du matériau, la température a deux effets mécaniques principaux :

- Le **changement de la rigidité du matériau bitumineux** caractérisé par la dépendance du module de rigidité vis-à-vis de la température (thermo-susceptibilité). A basse température, le bitume possède un comportement fragile. Sous l'effet conjugué des conditions climatiques et des contraintes de trafic, l'enrobé est susceptible de se fissurer. L'utilisation d'une grave bitume de grade élevé permet d'éviter la fissuration. Néanmoins, un bitume de grade trop élevé devient "mou" à température élevée, l'enrobé rencontre alors des problèmes d'orniérage (Grimaux and Hiernaux, 1977), (Chen and Tsai, 1998) (Sohm, 2011) (Sohm et al., 2012). Les enrobés doivent donc résister à la déformation permanente qui est aggravée à haute

température et supporter les basses températures sans fissures thermiques.

- La **création des contraintes et déformations** au sein du matériau en raison des dilatations-contractions thermiques qui peuvent provoquer et faire se propager des fissures avec les cycles thermiques, surtout à basse température (Figure 1.4). Par exemple, lors d'un refroidissement, la chaussée a tendance à se contracter. Mais, étant donnée que les mouvements de contraction sont empêchés dans le sens longitudinal de la chaussée, cela revient à exercer une traction longitudinale, des fissures transversales risquent d'apparaître. Ces fissures peuvent évoluer avec les cycles thermiques et traverser les couches de chaussée jusqu'à remonter à la surface.

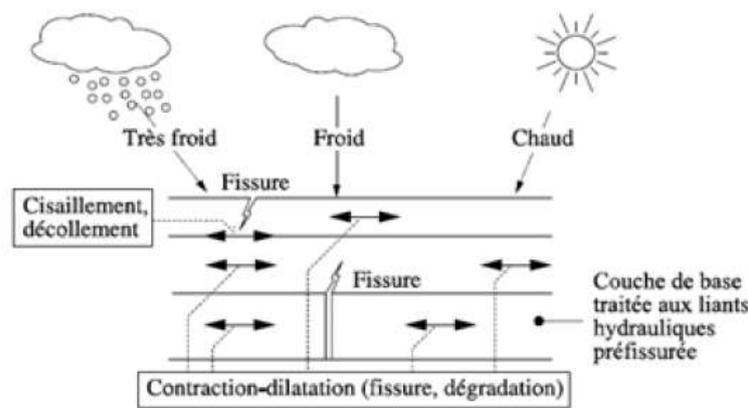


FIGURE 1.4 – Effet de la température sur la structure de chaussée (Di Benedetto and Corté, 2005)

- **Effet de l'eau** La présence de l'eau dans les structures de chaussées, à l'état liquide ou à l'état de glace, joue un rôle important dans la dégradation de ces dernières puisqu'elle cause ou accélère les dégradations comme la remontée de fines, l'orniérage, la fissuration et les défauts localisés (exemple des nids de poule dans les chaussées bitumineuses) (Hicks et al., 2003), (Mauduit et al., 2007), (Vulcano-Greullet et al., 2010).

L'accumulation de l'eau dans une chaussée bitumineuse peut se produire de différentes façons (Figure 1.5). La cause la plus courante est par précipitation puis infiltration à des degrés plus ou moins importants au travers du revêtement de surface de la chaussée, qu'il soit sain ou dégradé. On peut assister également à des infiltrations depuis les bords de la structure (eaux venues des coteaux, des fossés, etc) ou par absorption capillaire de l'eau des nappes phréatiques ou remontée de ces dernières (Mauduit et al., 2013).

Un système d'évacuation des eaux défaillant, mal positionné ou absent, une géométrie mal étudiée ou mal respectée - notamment lors des travaux d'entretien - à l'échelle de la chaussée ou de la superposition des couches, un tracé défavorable, la présence d'une source, la multiplication des interfaces lors d'entretiens successifs, sont donc autant de facteurs qui peuvent

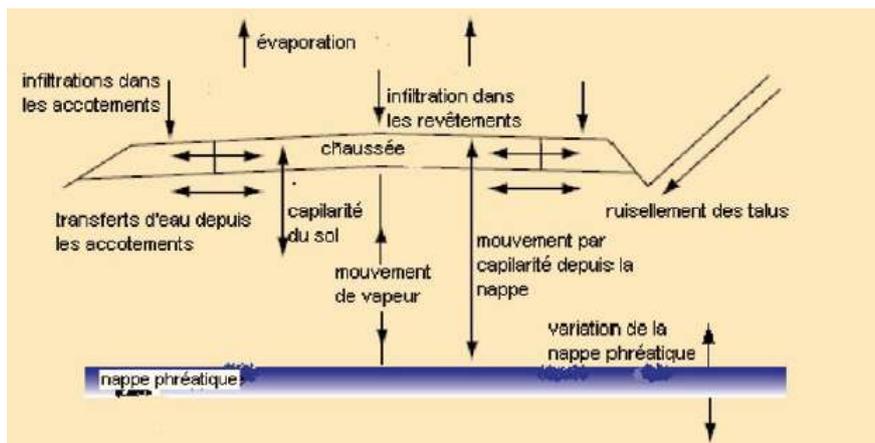


FIGURE 1.5 – Circulation d’eau dans la plate-forme et la chaussée (Castaneda Pinzon, 2004)

provoquer l’arrivée et/ou la stagnation de l’eau de ruissellement dans les chaussées. Des zones entières peuvent devenir gorgées d’eau de façon temporaire ou permanente et conduire à plus ou moins long terme à un désenrobage du matériau.

De plus, dans les structures à base de béton à liants hydrauliques, la présence d’eau peut conduire à des pressions d’eau au droit des joints et à l’interface entre couches qui peut affecter la durabilité de leur collage (LCPC, 1978) (Hun, 2012) (Chabot et al., 2016b) (Chabot et al., 2016c).

1.3.3 Fissuration dans les chaussées

Sous l’action du trafic (Figure 1.3), des fissures verticales peuvent donc se créer par fatigue à la base des matériaux bitumineux pour les structures bitumineuses. Ces fissures verticales peuvent aussi apparaître par retrait des matériaux hydrauliques dans les chaussées mixtes ou semi-rigides sous l’action des conditions thermiques (Figure 1.4) et hydriques (Figure 1.5). La propagation de cette fissure verticale peut se faire verticalement lorsque les conditions de liaison de l’interface sont plus résistantes. Dans ce cas la fissure peut se propager jusqu’à la surface avec un léger décollement à l’interface survenu au cours de la propagation verticale ou sans décollement (Figure 1.6).

Si des décollements surviennent assez rapidement la propagation de la fissure aura une composante horizontale qui peut produire une fissuration légèrement décalée par rapport à l’axe de la fissure vertical initiale. La proportion de ce décollement et la magnitude des déplacements verticaux influencent le développement de la fissure. Le résultat peut être une fissure centrée aux interfaces décollées lorsque les décollements sont légers, une fissure décentrée lorsque les décollements sont importants et une fissure double décentrée lorsque les décollements et les déplacements verticaux sont importants.

A coté des fissures qui se créent dans la chaussée, les joints de pré-fissuration réalisés dans le haut des chaussées BCMC par exemple (Figure 1.7) sont considérés comme des discontinuités initiales. Ces discontinuités peuvent générer des fissures près des joints et aux coins des dalles en haut de la couche

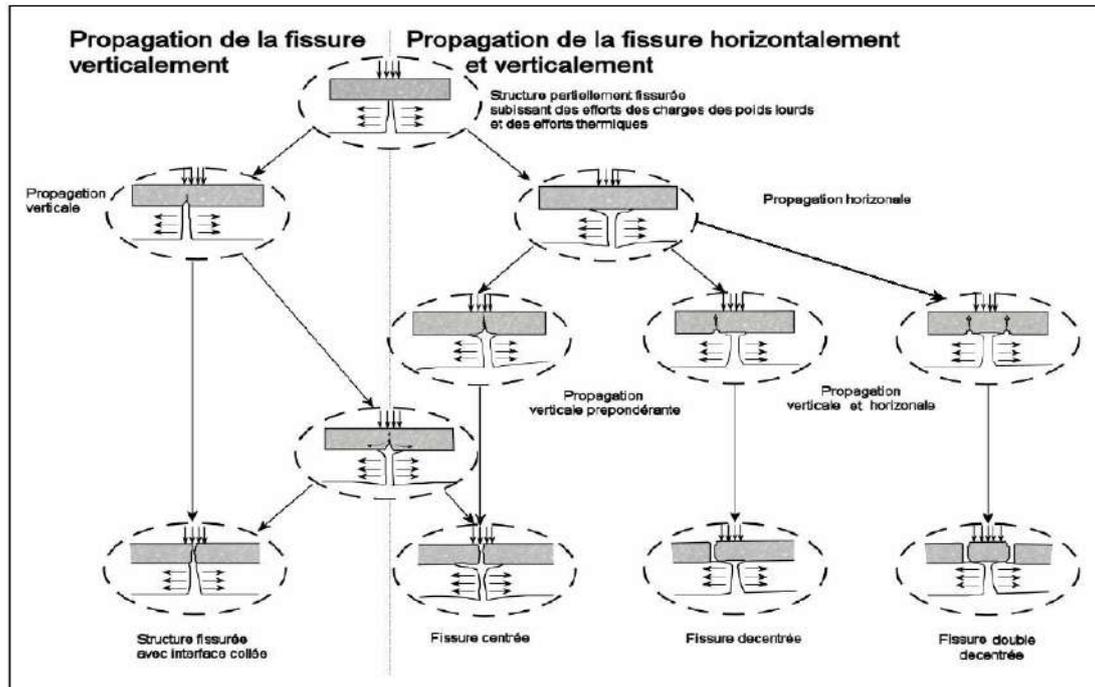


FIGURE 1.6 – Cheminement de la fissure (Marchand, 1984) (Pérez, 2008)

de béton et peuvent se propager vers le bas de cette couche.

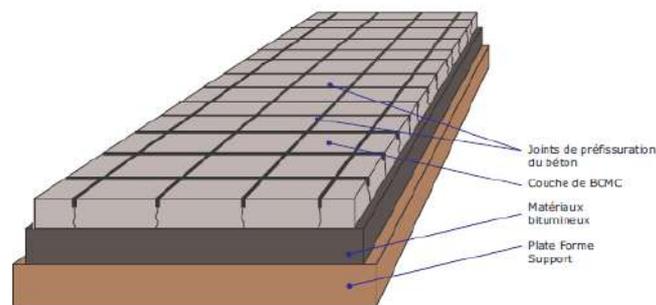


FIGURE 1.7 – Illustration de la préfissuration de la couche de BCMC (Pouteau, 2004)

1.4 Avantages et inconvénients des différents modèles de chaussées

En général, les méthodes rationnelles de dimensionnement d'une structure de chaussée routière consistent à déterminer la nature et l'épaisseur des couches qui la constituent afin qu'elle puisse résister aux diverses agressions auxquelles elle sera soumise tout au long de sa vie. Pour résister aux sollicitations dues au trafic, la chaussée doit assurer la diffusion des efforts induits par ce même trafic dans le sol de fondation. L'application d'une charge roulante induit ainsi une déformation en flexion des couches de la structure. Cette flexion entraîne des sollicitations en compression au droit de la charge en haut

de couche et des sollicitations en traction à la base des couches d'enrobés.

Depuis l'histoire du comportement mécanique des chaussées, il existe différentes méthodes pour bien appréhender cette déformation. Parmi ces méthodes, on a les méthodes empiriques de dimensionnement qui font appel exclusivement à des expériences comparant le comportement à long terme de diverses structures pour différentes conditions climatiques et de trafic. Des essais accélérés ou non en vraie grandeur apportent également de nombreuses informations nécessaires pour la mise en place des règles empiriques de dimensionnement. Ces méthodes de dimensionnement donnent lieu ensuite à différents paramètres utilisés dans les modèles de dimensionnement classiques.

Avant l'arrivée d'outils de calculs numériques performant, la recherche de modèles de comportement de systèmes multicouches appliqués aux chaussées a fait l'objet de nombreux travaux recensés chronologiquement par exemple dans les travaux de thèse de (Salasca, 1998) et (Tran, 2004) comme ci-dessous :

- **Modèle de Boussinesq (1885)** créé et utilisé initialement en mécanique des sols, ce modèle s'appuie sur un massif homogène élastique semi-infini (Boussinesq, 1885) soumis à l'action d'une charge statique ponctuelle ou non. Son utilisation pour l'étude de la fissuration des structures de chaussées présente les inconvénients suivants :
 - ce modèle ne peut pas modéliser les structures multicouches
 - la zone d'application du modèle est limitée au cas où le corps de chaussée n'est pas trop différent du sol naturel
 - il ne peut donc pas prendre en compte des discontinuités dans une couche ou à l'interface entre deux couches
- **Modèle bicouche de Westergaard (1926)** : Westergaard en 1926 crée le premier modèle utilisé particulièrement pour les chaussées béton. La simplicité du modèle permet d'exprimer les contraintes sous forme d'équations explicites simples. En effet, ce modèle donne les contraintes et déformations d'un système constitué d'une plaque mince de dimension infinie dans le plan reposant sur un sol assimilé à un ensemble de ressorts verticaux sans connexions horizontales communément appelé fondation de Winkler. Le déplacement vertical en un point est alors proportionnel à la pression verticale en ce point. Le sol réagit ainsi de manière élastique et uniquement dans le sens vertical. Dans la réalité d'une vie de chaussée, le sol ne se comporte pas comme un massif élastique et accuse des déformations permanentes. La réaction du sol n'est donc pas strictement verticale : les contraintes se dispersent en profondeur de fait les contraintes de cisaillements ne sont pas à exclure. De plus, les cisaillements ne peuvent pas être pris en compte à l'interface chaussée-sol, ce qui influence beaucoup le résultat. Le modèle de Westergaard surestime ainsi les contraintes. La figure 1.8 illustre la différence de comportement d'une plaque reposant sur un sol réel et d'une plaque dont la fondation est modélisée par un massif de Winkler sous une charge répartie.

Bien que ce modèle soit à la base de la conception des chaussées rigides, pour son application à l'étude des chaussées fissurées, il ne peut pas représenter un complexe de type multicouche

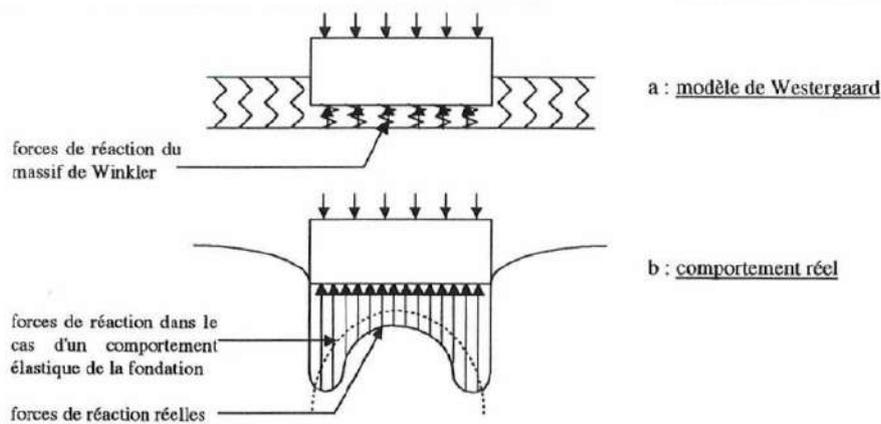


FIGURE 1.8 – Représentation de la fondation d’un massif de Winkler et de son comportement réel (Salasca, 1998)

de chaussée.

- **Modèle bicouche de Hogg (1938)** : donne des contraintes et déformations d’une plaque mince de dimensions infinies glissant parfaitement sur un massif élastique semi-infini de type Boussinescq (Hogg, 1938). Ce modèle présente encore les inconvénients suivants :
 - par l’hypothèse de glissement parfait entre la plaque et le massif, les cisaillements ne sont pas pris en compte à l’interface chaussée-sol, ce qui influence ainsi beaucoup les résultats
 - une seule couche ou plaque est modélisée
 - des discontinuités verticales ne peuvent pas être introduites dans la plaque
- **Modèle de Burmister (1943)** : C’est en 1943 que Burmister, professeur à l’Université de New-York, publia sa solution du multi-couche élastique, modèle utilisé particulièrement pour le dimensionnement des chaussées souples. A l’époque les chaussées et les aérodrômes étaient constitués de plus de deux couches et de fait Burmister connut un succès foudroyant. Le développement rapide de l’informatique lui procura en outre les outils nécessaires à son exploitation. Ce modèle est depuis à la base de toutes les méthodes rationnelles de dimensionnement. Il aborde et traite le problème général d’une structure à n couches reposant sur un massif élastique semi-indéfini. Les principales particularités du modèle sont les suivantes (Burmister, 1943) :
 - la charge de référence est supposée soit ponctuelle soit à pression circulaire autorisant l’utilisation de l’hypothèse de calcul 2D axisymétrique
 - les couches sont traitées comme des structures élastiques (et non comme des plaques)
 - les interfaces entre couches peuvent être collées ou totalement glissantes
 - le cas de charges complexes (jumelages, essieux tandem ou tridem etc.) peut être traité en additionnant les effets des charges élémentaires
 - sa principale limitation réside dans le fait que, comme dans le modèle de Hogg, les couches sont infinies en plan et ne peuvent de fait introduire des discontinuités verticales

- dans le cas des dalles en béton, il est notamment nécessaire de le compléter par un modèle aux éléments finis pour évaluer les conséquences des charges en bord ou en angle de dalle
- **Modèle de Pasternak (1954)** : le modèle de fondation de Pasternak améliore le modèle de Westergaad pour la modélisation du sol. Ainsi, le massif de sol est toujours considéré comme un assemblage de ressorts, mais une couche dite "de cisaillement" est introduite entre la couche de chaussée et la fondation de Winkler. Cette couche est constituée de ressorts verticaux incompressibles, qui ne se déforment qu'en cisaillement. Cette partie ajoutée a pour fonction de ne prendre en compte que le cisaillement à l'interface chaussée-sol (Pasternak, 1954). Ce modèle présente encore les inconvénients du modèle de Westergaad :
 - les ressorts ont la même rigidité et travaillent indépendamment des uns et des autres
 - la déflexion en un point donné ne dépend que de la contrainte en ce point sans qu'il y ait d'effet exercé par la fondation environnante
 - il ne peut pas représenter un complexe de type multicouche de chaussée
 - des fissures verticales dans la couche ne peuvent pas être introduites
- **Modèle de Jeuffroy (1955)** : Ce modèle est une combinaison des modèles de Hogg et de Burmister. Il est constitué d'une plaque mince posée sans frottement sur une couche élastique de Burmister parfaitement collé au sol. Il a permis pour la première fois d'établir un système très complet d'abaques (Jeuffroy, 1955). Il a constitué pour les ingénieurs français une étape fondamentale vers plus de rationalité dans le dimensionnement des chaussées malgré les inconvénients suivants :
 - comme dans le modèle de Burmister, la charge est considérée circulaire, ce qui n'est pas tout à fait proche de la charge de roue de camion
 - le modèle ne prend pas en charge le cisaillement entre les deux premières couches de chaussées
 - avec l'hypothèse de couche infinie dans le plan de la deuxième couche, ce modèle ne peut pas prendre en compte la présence des fissures dans cette couche (dont l'application peut être une étude de remontée de fissure, Figure 1.6)
- **Modèle de Kerr (1964)** : le modèle de fondation de Kerr (Kerr, 1964) est une suite plus sophistiquée du modèle de Pasternak. Le massif de sol est un assemblage de ressorts avec une couche de cisaillement, dans lequel est introduit un assemblage de ressorts entre la couche de chaussée et la couche de cisaillement. En comparant les déflexions, les pressions et moments obtenus pour les trois types de chargements (charge uniformément répartie, forces concentrées aux bords d'une bande infinie, moments sur ces bords) au moyen de plusieurs modèles de fondation (Winkler, Kerr, Pasternak et fondation Boussinesq), Kneifati (1985) a montré que le modèle de Kerr permet d'obtenir des résultats proches de ceux déterminés par le massif de Boussinesq (Salasca, 1998) . Il reste l'inconvénient majeur que ce modèle ne peut pas présenter un complexe de type multicouche de chaussée doté de discontinuités verticales ou horizontales.

1.5 Bilan

Les modèles actuels de la méthode de dimensionnement des chaussées sont limités pour prendre en compte l'existence de discontinuités verticales ou des décollements partiels entre couches. En effet, les inconvénients reportés dans ce chapitre sont finalement les suivants : Certains de ces modèles ne semblent pas pouvoir :

- bien représenter la modélisation du massif semi-infini du sol. Cet inconvénient est présent dans les modèles de Westergaad (Westergaad, 1926) et de Pasternak (Pasternak, 1954)
- bien représenter la modélisation d'interface entre la chaussée et le sol. Cet inconvénient est présent dans les modèles de Westergaad (Westergaad, 1926), de Pasternak (Pasternak, 1954) et de Kerr (Kerr, 1964) et pour les autres ne peuvent pas modéliser des décollements partielles
- représenter le complexe d'un multicouche de chaussée. Cet inconvénient est présent dans les modèles de Boussinesq (Boussinesq, 1885), de Westergaad (Westergaad, 1926), de Hogg (Hogg, 1938), de Pasternak (Pasternak, 1954) et de Kerr (Kerr, 1964)
- faire un calcul avec des charges de formes variées (seulement avec une charge circulaire). Cet inconvénient est présent dans les modèles de Burmister (Burmister, 1943) et de Jeuffroy (Jeuffroy, 1955). Cet inconvénient est palié malgré tout par l'utilisation possible du principe de superposition des charges
- prendre en compte une discontinuité verticale ou un bord fini dans le multicouche de chaussée. Cet inconvénient est présent dans les modèles de Burmister (Burmister, 1943), de Jeuffroy (Jeuffroy, 1955).

Dès 1964, le développement de l'informatique facilite l'usage des modèles multicouches élastiques. Ainsi depuis cette époque la méthode de dimensionnement française s'est construite sur le modèle de Burmister. La méthode prend en compte indirectement la viscoélasticité des matériaux dans les structures de chaussées à l'aide du module équivalent à une vitesse de charge et température du matériau donné. Mais cette méthode ne prend en compte que d'une manière implicite approché et empirique d'éventuels endommagements. En particulier seul un glissement total entre couche peut être possible d'une façon explicite. Il existe dans le domaine des chaussées souples quelques logiciels de calcul adaptés plus ou moins à l'étude de quelques cas de chaussées dégradées. Ces logiciels vont du simple outil de calcul des contraintes aux modèles que l'on pourrait qualifier de complets et qui permettent de déterminer les durées de vie présumées des chaussées en fonction de données relatives aux trafics, aux caractéristiques mécaniques des matériaux et aux conditions climatiques ; l'ensemble de ces données peut de plus être traité de manière probabiliste. Le logiciel de calcul le plus utilisé en France est Alizé, mis au point par le Laboratoire central des ponts et chaussées, et distribué exclusivement par la société itech. Il utilise le modèle de Burmister et différents coefficients calés sur des calculs aux éléments finis ou expérimentations en vraie grandeur notamment pour les chaussées béton.

Aux États Unis, la méthode de l'AASHTO (American Association of State Highway and Transportation Officials) est une méthode basée sur une analyse empirique des résultats des essais de l'AASHO Road test réalisés à la fin des années 1950 sur plus de 500 sections tests de chaussées. Cette méthode a

subi une évolution importante depuis 1961 jusqu'en 1993 suivant quatre versions. Son rôle est d'établir une relation entre les caractéristiques structurales de la chaussée et l'évolution dans le temps du niveau de qualité des chaussées (exprimé en indice de viabilité). La dernière version du guide de dimensionnement date de fin 2004, mais la version de 1993 reste encore la plus utilisée (Mengue et al., 2015).

Afin de mieux comprendre, évaluer et analyser le comportement des chaussées dégradées, les chercheurs ont continué leurs travaux pour proposer des modèles qui puissent compléter les modèles présentés ci-dessus. Parmi ces modèles, il existe ceux qui prennent en compte d'une manière directe des lois de comportement viscoélastique des matériaux bitumineux pour l'étude des chaussées souples à faible trafic ou soumises à de forts gradients thermiques (Heck et al., 1998), (Nguyen, 2008). A l'IFSTTAR, le modèle semi analytique 3D de ViscoRoute[©] (Duhamel et al., 2005b) (Chabot et al., 2010) (Chupin et al., 2010) prend en compte la loi de comportement thermo-viscoélastique des enrobés bitumineux de Huet-Sayegh (Huet, 1963), (Sayegh, 1963) (Huet, 1999). Le logiciel ViscoRoute[©] permet de modéliser d'une manière semi analytique les structures multicouches 3D semi-infinies non fissurées sous passage de charges roulantes, avec des pressions de contact pouvant être non verticales (Hammoum et al., 2010) et des interfaces collées (version 2.0) ou décollées (version 2.1), (Chupin et al., 2013). La vitesse des charges est constante non nulle et les matériaux ont un comportement élastique ou viscoélastique linéaire. Cependant ce modèle 3D résolvant les équations dans le repère de la charge roulante exige une continuité de l'espace c.à.d que ni le décollement partiel ni la présence de fissures verticales ne peuvent être traités par ce logiciel.

Aussi l'utilisation des Modèles aux Eléments Finis s'impose chaque fois que des modèles multicouches continus, élastiques et linéaires s'avèrent trop simplistes. Cette approche permet notamment de traiter les cas suivants :

- caractère tridimensionnel de la structure
- non linéarité ou évolution des conditions de contact
- comportement viscoélastique des matériaux de chaussées sous charges roulantes, etc.

Pour le dimensionnement des chaussées effectué par les bureaux d'études, la rapidité, la simplicité, l'indépendance et surtout l'exactitude des calculs sont exigées. Le modèle de Burmister contenu dans la plupart des logiciels de dimensionnement comme Alizé de l'IFSTTAR (ex LCPC) assure ces critères pour le dimensionnement d'une chaussée neuve et sans fissures. L'inconvénient est qu'il ne permet pas de prendre en considération les discontinuités dans la chaussée (fissure ou décollement). Cependant, dans le cas de dimensionnement des chaussées rigides ou le cas de renforcement des chaussées fissurées, quand il existe des discontinuités ou des bords finis dans le multicouche de chaussée, les modèles simplifiés existants ne peuvent ainsi pas en calculer les contraintes et les déformations.

L'utilisation de la méthode des éléments finis peut être utile mais cela reste un outil assez lourd pour un calcul de chaussée 3D fissurée. Ceci limite son utilisation en bureau d'étude notamment pour effectuer des études paramétriques.

Chapitre 2

Revue des modèles existants prenant en compte des discontinuités

Nous avons vu que la méthode française de dimensionnement des chaussées ne prend pas en compte les discontinuités d'une manière explicite. Dans ce qui suit, nous listons quelques concepts de fissuration et modèles dédiés à leur études.

2.1 Généralités sur la fissuration dans un matériau

La rupture d'un matériau se produit lorsque les efforts exercés sur ce matériau dépassent les contraintes ou les déformations limites. Suivant que l'on s'intéresse à la dégradation du matériau d'un point de vue micro-mécanique ou macro-mécanique, deux approches peuvent être utilisées : la mécanique de l'endommagement (Lemaitre and Chaboche, 1990), (Benallal, 2000) et la mécanique de la rupture (Bui, 1978). De nombreux travaux existent sur le sujet. Pour les matériaux de chaussées, notamment à la Rilem quelque soit le modèle utilisé, le lecteur intéressé peut trouver des éléments d'informations dans les actes de différentes conférences dont celles référencées dans (Petit et al., 2004), (Al-Qadi et al., 2008), (Scarpas et al., 2012), (Chabot et al., 2016a).

La mécanique de l'endommagement propose de décrire continûment la dégradation progressive du matériau due à l'apparition, à la croissance, puis à la coalescence de micro-fissures ou de micro-cavités présentes dans le matériau. Pour les matériaux bitumineux, on peut citer les travaux de Bodin sur le sujet au LCPC (Bodin, 2002), (Bodin et al., 2004a), (Bodin et al., 2016). Lorsque les microfissures, les microcavités créées par croissance ou par coalescence des défauts sont de taille assez grande, cette façon d'aborder le problème n'est plus valable.

La fissuration prend en compte l'existence de défauts comme des inclusions ou des vides dans le matériau ou encore des zones d'endommagement à partir desquels des fissures vont s'initier puis se propager pour parvenir à une taille provoquant la ruine de la structure. La mécanique de rupture a pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de

la pointe d'une fissure. L'étude de ces champs mécaniques permettant ensuite de juger de la stabilité ou non d'une fissure. En général, on distingue deux types de fissuration : la fissuration stable et la fissuration instable. La fissuration stable comprend la fissuration quasi-statique sous une charge constante, la fissuration par fatigue sous une charge répétée (cyclique) et la fissuration dynamique lorsqu'une charge est appliquée soudainement. La fissuration instable est instantanée et peut conduire à une fissuration stable (Mercier et al., 1999).

D'un point de vu macroscopique, on distingue deux modes principaux de rupture : la rupture plate correspond à une surface de rupture globalement perpendiculaire à la direction de la contrainte principale maximale, et la rupture inclinée qui est inclinée dans le sens transversal par rapport à la direction de propagation s'accompagne souvent de grandes déformations (Douai, 2011). La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants (Figure 2.1) :

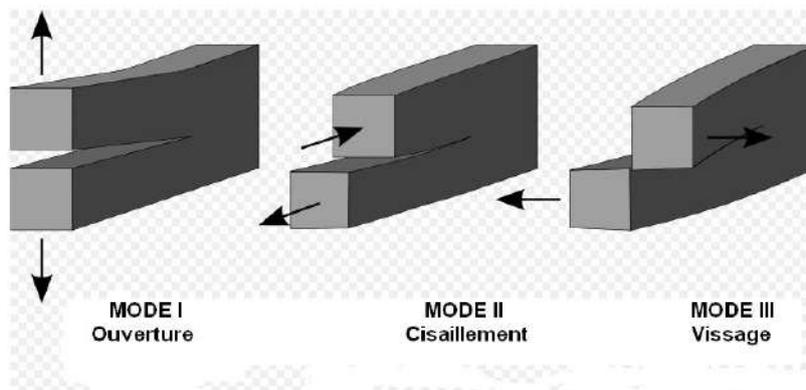


FIGURE 2.1 – Modes élémentaires de sollicitations d'une fissure tridimensionnelle

- Le premier, appelé mode I ou d'ouverture de la fissure : la contrainte de traction est normale au plan de fissure
- Le deuxième, appelé mode II ou de cisaillement plan : la contrainte de cisaillement agit parallèlement au plan de la fissure et perpendiculaire au front de fissure
- Le troisième, appelé mode III ou de cisaillement anti-plan ou encore de déchirure : la contrainte de cisaillement agit parallèlement au plan de la fissure et parallèlement au front de fissure.

De manière générale, une fissure se propage dans un matériau sous une combinaison de contraintes dans les trois modes.

Historiquement, la mécanique de la rupture est exposée par (Griffith, 1921) qui établit une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture. Il applique l'analyse des contraintes autour d'un trou elliptique à la propagation instable d'une fissure. Une théorie de la rupture basée sur la stabilité de la fissure valable uniquement pour les matériaux fragiles, ne tenant pas compte de la dissipation de l'énergie due à la plastification. En 1948, Irwin proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que

l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles. En 1956, il développa, avec un groupe de chercheurs américains, le concept de taux de restitution d'énergie à partir toujours de la théorie de Griffith mais sous une forme facilement exploitable par les concepteurs de structures. Après, il montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique relié au taux de restitution d'énergie. Ce paramètre issu de la mécanique linéaire de la rupture, est appelé le "Facteur d'Intensité de Contrainte" (Irwin, 1957). Ce concept fut également utilisé par Paris (Erdogan and Paris, 1963) afin de décrire la propagation des fissures en remplaçant la notion d'endurance par la notion de fatigue pour une meilleure prédiction des durées de vie des structures. Quelques années plus tard, les chercheurs s'intéressaient à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure et proposèrent ce qu'on appelle une correction de zone plastique. En 1961, Wells proposa le déplacement en fond de fissure CTOD (Crack Tip Opening Displacement) comme paramètre alternatif à la mécanique linéaire de la rupture lorsque la plastification devient importante comme c'est le cas dans les matériaux très ductiles. En 1968, un nouveau paramètre appelé intégrale J, pour mieux décrire la répartition des contraintes dans les zones plastifiées, a été développé (Rice, 1968). En 1981, Shih (Shih, 1983) et Bui (Bui, 1978) ont permis de faire le lien entre mécanique de la rupture locale et mécanique de la rupture énergétique (Pommier et al., 2009).

2.2 Généralités sur le décollement entre couches des matériaux

Une interface est une surface qui sépare et crée une discontinuité entre deux milieux d'une structure stratifiée (Espeche and Leon, 2011). En mécanique des matériaux et des structures, l'interface est généralement considérée comme parfaite lorsqu'elle est parfaitement collée, ou glissante lorsqu'elle est complètement décollée. Au sens mécanique, une interface parfaite est une surface à travers laquelle le vecteur de déplacement et le champ de contrainte sont continus. L'hypothèse simplificatrice des interfaces parfaites n'est plus valable dans de nombreuses situations plus complexes en réalité. En effet, l'interface est un milieu favorable aux réactions physico-chimiques et à l'endommagement mécanique. L'intérêt scientifique pour les interfaces imparfaites dans les structures de chaussées prend de l'ampleur depuis quelques années avec l'apparition des nouvelles pathologies et le développement des structures multicouches dans lesquels les interfaces jouent un rôle prépondérant (Tran, 2004), (Tran et al., 2004), (Chabot et al., 2004), (Pouteau et al., 2006a), (Diakhaté et al., 2006), (Chabot et al., 2007), (Diakhaté, 2007), (Diakhaté et al., 2011), (Hun, 2012), (Ktari et al., 2016), (Ktari, 2016), (Chabot et al., 2016a), (Grellet et al., 2016), (Gharbi et al., 2017).

L'analyse des dommages dans des structures multicouches peut être très difficile en raison des singularités situées au niveau des interfaces entre les couches ou à proximité des bords libres ou des fissures verticales (Williams, 1959), (England, 1965) (Chabot, 2013). Le décollement d'interface des couches de chaussées peut apparaître et se propager pour plusieurs raisons (Figure 1.6). Les phénomènes d'endommagement qui précèdent la ruine des structures en matériaux composites sont principalement pilotés par les efforts à l'interface entre les couches. le décollement peut se propager suivant les trois modes d'ouverture décrits précédemment (Figure 2.1), ou une combinaison entre ces modes.

D'après (Ktari, 2016), les modèles d'interface sont divisés en trois catégories :

- Les **modèles basés sur la mécanique de la rupture** sont efficaces pour analyser ou simuler les mécanismes de la rupture fragile. Ils permettent de résoudre efficacement les problèmes de propagation quasi-statique des fissures dans le cas des matériaux homogènes élastiques linéaires. La propagation de fissures peut être étudiée par une analyse globale énergétique en calculant le taux de restitution d'énergie ou par une analyse locale des contraintes en pointe de fissure pour peu que la zone plastique soit petite. La mécanique de la rupture ne permet pas de simuler la totalité du processus initial de fissuration des interfaces initialement collées mais peut donner une idée globale de sa propagation dans un outil de calcul 3D simple d'utilisation pour peu que la taille des hétérogénéités ne soient pas trop grosses dans les unités considérées.

- Les **modèles de zone cohésive** sont basées sur une approche phénoménologique pour la modélisation d'une interface avec une épaisseur nulle ayant des propriétés mécaniques obtenues physiquement. Ils décrivent la loi de comportement de l'interface en s'appuyant à la fois sur le concept de contrainte (mécanique des milieux continus), et en utilisant des paramètres de la mécanique de la rupture (taux de restitution d'énergie) (Monerie and Acary, 2001), (Raous, 2011), (Serpieri et al., 2015a). Ils sont utilisés pour la modélisation des phénomènes d'adhésion complexes (endommagement, mixité des modes de sollicitations, décollement, etc). L'inconvénient de ces modèles est l'identification de la forme et des paramètres matériaux, ce qui limite leur utilisation prédictive dans les simulations numériques. Ces modèles présentent aussi des problèmes numériques très mal conditionnés, tel que les sauts de solutions (Monerie and Acary, 2001). Lors de leur application dans un cadre éléments finis, les modèles de zones cohésives endurent d'un problème de dépendance de la solution au maillage et au pas de temps. Malgré ces points négatifs, les modèles de zones cohésives restent une voie intéressante et prometteuse pour la modélisation des interfaces à l'échelle méso et macroscopique.

- Les **modèles basés sur les approches asymptotiques** : sont théoriquement basées sur des formulations mathématiques. En effet, l'étude asymptotique de couche mince conduit à un problème limite avec une loi d'interface par des développements limités au voisinage de zéro. Cette loi met en jeu les paramètres physiques et géométriques d'interphase. Le comportement équivalent de l'interphase lorsque l'épaisseur diminue à zéro est constructive (Suquet, 1988), (Dumontet, 1990), (Lebon and Rizzoni, 2011). Ces modèles sont pertinents pour la prise en considération des microfissures et de la rugosité à l'interface (Ktari, 2016). Cependant, la modélisation des comportements non linéaires tels que l'endommagement, la viscosité, la mixité des modes de sollicitation, etc ne sont pas encore au point.

2.3 Méthodes numériques pour modéliser les structures fissurées

2.3.1 Méthodes classiques des éléments finis (FEM)

L'écriture des équations de la mécanique conduit à l'écriture d'équations aux dérivées partielles. Selon les hypothèses utilisées dans les modèles telles ou telles méthodes numériques sont utilisées. Clas-

siquement, la méthode aux Éléments Finis suivant une approche en déplacement est utilisée pour modéliser les structures fissurées. Avec cette méthode contenue dans la plupart des codes, la fissure est par principe décrite explicitement. Dans le passé, certains auteurs comme (Goacolou et al., 1983), (Petit, 1990), (Elouard, 1993), (Romanoschi and Li, 2002), (Baek and Al-Qadi, 2006), etc ont utilisé le concept de la mécanique de la rupture pour modéliser les chaussées fissurées. Deux difficultés majeures se posent ainsi. Tout d'abord la nature physique singulière du champ de contrainte au voisinage de la pointe de fissure impose un maillage très fin autour de celle-ci. La représentation du champ singulier autour de la pointe de fissure peut être améliorée par l'emploi d'éléments singuliers dits de Barsoum (Barsoum, 1974). Ces éléments munis de noeuds supplémentaires aux quarts des côtés permettent d'intégrer exactement la singularité élastique et ainsi obtenir de meilleurs résultats. Cependant, l'utilisation de tels éléments avec un comportement non-linéaire semble à proscrire étant donné la nature différente de la singularité, bien qu'ils permettent d'améliorer les résultats par rapport à des éléments finis classiques (Bouchard et al., 2000). Enfin, la représentation explicite de la fissure pose le problème du trajet de fissuration lors de la simulation de propagation. En effet, soit le maillage est construit avec une connaissance a priori du trajet, soit celui-ci est changé à chaque fois que la fissure avance, le problème de la projection des champs de l'ancien maillage sur le nouveau se pose alors. On distinguera deux grandes familles de méthodes : celles s'intéressant aux problèmes de fissure droite en mode I, et celles traitant des fissures courbes en mode mixte.

Dans le cas des fissures sollicitées en mode I, le trajet de fissure est entièrement connu puisque rectiligne. La discrétisation du trajet est alors entièrement dépendante de la taille de maille utilisée le long de celui-ci. La technique employée couramment est celle dite du déboutonnage ou relâchement de noeuds (Mcclung and Sehitoglu, 1989a) (Mcclung and Sehitoglu, 1989b) (Solanki et al., 2003) (Sander and Richard, 2005) (Sander, 2006). Deux difficultés majeures se posent avec ce type de méthode : le relâchement progressif (ou non) des noeuds en appliquant des forces nodales, et le choix de "l'instant" de propagation. A ce sujet, différents auteurs proposent de relâcher les noeuds à l'effort minimum (Solanki et al., 2003), à l'effort maximum (Fleck, 1986), (Sander and Richard, 2005) ou après le maximum de l'effort (Mcclung and Sehitoglu, 1989a). Il en ressort que la plupart des auteurs ne sont toujours pas d'accord sur la stratégie à adopter, bien que la propagation au maximum de l'effort soit la plus utilisée. Enfin, une certaine dépendance à la taille des éléments utilisés le long du trajet de fissure peut intervenir dans le cas de maillages trop grossiers (Solanki and Newman, 2004).

Dans le cas d'une fissure sollicitée en mode mixte le trajet est quelconque et la plupart du temps complexe. La connaissance du trajet de fissure a priori soit à partir de données expérimentales, soit de résultats de calculs précédents permet de traiter le problème de la même façon qu'en mode I. Dans le cas général, deux méthodes sont classiquement utilisées : les méthodes de remaillage (Bittencour et al., 1996) (Bouchard et al., 2000) (Bouchard and Chastel, 2003) (Trädegård et al., 1998) (Tvergaard, 2004) et les méthodes utilisant des éléments d'interface à zones cohésives (Nguyen et al., 2001), (Yang, 2005). La question primordiale que posent les méthodes avec remaillage est le transfert des champs d'un maillage sur l'autre, ceci ayant d'autant plus d'importance avec la prise en compte de non-linéarités matérielles. Dans les cas des méthodes à éléments d'interfaces, le trajet de fissure est imposé par la

discrétisation, les éléments d'interface étant placés à la frontière des éléments finis. Le choix de la loi de décohésion de l'interface est également un facteur influençant les résultats.

2.3.2 Méthodes non basées sur les éléments finis

- Méthode des éléments de frontières : Cette méthode suppose que l'on connaisse à ce type de problème des solutions analytiques qui correspondent à des conditions aux limites particulières (aussi appelées fonctions de Green) (Yan and Nguyen-Dang, 1995) (Leitao et al., 1995) (Tuhkuri, 1997) (Leitao and Aliabadi, 2000) (Trinh, 2014). La représentation des fissures comme des frontières du domaine d'étude est le grand avantage de ce type de méthode. Seul le bord et les lèvres de la fissure sont discrétisés. Le travail de remaillage entre chaque étape est donc minime puisqu'il suffit d'ajouter un ou quelques éléments sur les incréments de fissure. Ceci permet également, en plus de la simplicité de représentation, de faire évoluer la fissure aisément. La gestion des non-linéarités telles que la plasticité ou le contact, ainsi que l'intégration en espace des solutions fondamentales pose un certain nombre de problèmes numériques, notamment la nécessité de calculs volumiques intermédiaires ce qui entraîne la perte de l'intérêt principal de la méthode (Fedelinski, 2004).
- Méthodes sans maillage : Parmi les différentes méthodes sans maillage pour modéliser les structures fissurées, la méthode dite EFG "Element Free Galerkin method" proposée par Belytschko (Belytschko et al., 1994) est la plus utilisée en mécanique de la rupture. Ces méthodes sans maillage ne raisonnent plus sur un découpage de la géométrie en éléments, mais sur une représentation du volume par une densité de noeuds, ce qui constitue l'avantage de ces méthodes. Cependant, comme toute méthode numérique, elle possède un certain nombre d'inconvénients, tels que la lourdeur du calcul des voisins et la taille du domaine d'influence et surtout la difficulté d'imposition de conditions aux limites cinématiques.

2.3.3 Méthodes basées sur la partition de l'unité

- La partition de l'unité(PUM) : Le concept de partition de l'unité (Partition of Unity Method) a été introduit par Babuska et Melenk (Babuska and Melenk, 1997). Les auteurs cherchent à améliorer la qualité de la solution fournie par la méthode des éléments finis non pas en raffinant le maillage, mais en injectant dans la base de fonctions utilisée pour approximer le problème des fonctions à priori proches de la solution attendue. L'avantage principal de cette méthode est qu'il n'est pas nécessaire de représenter explicitement la fissure par le maillage. En effet, l'utilisation d'éléments géométriques en 2D ou de fonctions de niveaux en 2D-3D (Moës et al., 2002) (Gravouil and Belytschko, 2002), couplés à l'enrichissement de l'approximation permet de représenter la discontinuité. Cette méthode s'applique donc particulièrement bien à tout problème présentant une singularité.
- Méthode des éléments finis étendue (XFEM) : La méthode X-FEM est une méthode moderne et efficace, introduite dans (Moës et al., 1999), comme une nouvelle approche pour représenter

des surfaces de rupture et simuler la propagation des fissures (Sukumar et al., 2015). Elle est la généralisation des méthodes pour traiter la fissuration en éléments finis et basée sur la méthode de partition de l'unité (Babuska and Melenk, 1997). Dans la méthode X-FEM, les éléments coupés par une fissure sont enrichis et possèdent des degrés de liberté supplémentaires qui permettent de représenter un champ de déplacement discontinu de part et d'autre de celle-ci. Les éléments peuvent être également enrichis par des fonctions asymptotiques en pointe de fissure afin d'améliorer la précision des calculs. La méthode X-FEM est fréquemment associée à la technique des level-sets (Sethian, 1999) pour la représentation de la fissure et la modélisation des interfaces. Le but est d'améliorer la méthode des éléments finis, pas de la remplacer, et de conserver ses attraits en y ajoutant des particularités permettant de faire des choses impossibles par ailleurs.

2.3.4 Méthodes numériques de traitement du contact

Le traitement du contact entre deux solides introduit dans les équations classiques de la mécanique des conditions statiques et cinématiques sur la zone en contact. Le point clé est la condition de non pénétration des deux corps en contact. Cette condition, qui s'écrit sous forme d'une inéquation, conduit à un problème de minimisation sous contrainte exprimé sous forme d'une inégalité variationnelle. Il existe un nombre important de méthodes permettant de traiter ce type de problème, on peut classer celles-ci en deux grandes catégories (Raous et al., 2004) : les méthodes sans régularisation et avec régularisation.

Pour les méthodes sans régularisation, on peut citer les méthodes de projection et de programmation mathématique (Champaney, 2003), (Raous et al., 2004). Dans le cas avec régularisation, on trouve les méthodes avec pénalisation, à multiplicateurs de Lagrange, de Lagrangien perturbé (Belytschko et al., 2002) et enfin de Lagrangien augmenté (Belytschko et al., 2002), (Raous et al., 2004). Le traitement du problème par pénalisation revient physiquement à accepter une légère pénétration d'un corps dans l'autre (sauf dans le cas d'un terme de pénalité infini). Malgré cela, cette méthode est relativement utilisée du fait de son implémentation réputée assez simple. L'utilisation de multiplicateurs de Lagrange consiste à transférer le problème unilatéral sur les efforts par dualisation. Ces deux techniques ramènent le problème à une égalité variationnelle, qui est alors plus facile à résoudre par la méthode des éléments finis. L'utilisation de la pénalisation dans le cas des problèmes avec frottement est assez attirante puisque les équations suggèrent alors une loi de comportement de l'interface analogue à celles utilisées traditionnellement en plasticité (Hittinger and Combescure, 1982), (Wriggers et al., 1989), (Raous et al., 2004). Enfin, la dernière méthode de régularisation est celle dite de Lagrangien augmenté, qui combine à la fois la pénalisation et les multiplicateurs de Lagrange (Alart and Curnier, 1991) (Simo and Laursen, 1992), (Belytschko et al., 2002). Cette méthode a pour principaux avantages, notamment par rapport à la méthode de pénalisation, l'amélioration du conditionnement du problème et la satisfaction exacte de la condition d'imperméabilité avec un coefficient de pénalité fini.

Dans un cadre très général, la difficulté du traitement d'un problème de contact par une méthode de type éléments finis consiste en la détermination des zones en contact. Il existe plusieurs techniques

permettant de détecter les points en contact telles que l'approche hiérarchique et l'approche par voisinage (Raous et al., 2004).

2.3.5 Thick level Set (TLS)

Le modèle TLS développé récemment permet de modéliser l'initiation et la propagation de fissures. Il rend possible la transition entre les approches reposant sur la mécanique de l'endommagement et la mécanique de la rupture. En effet, l'initiation des fissures repose principalement sur la mécanique de l'endommagement tandis que la propagation des fissures repose sur la mécanique de la rupture impliquant la discontinuité de déplacement au niveau de la fissure (Moës et al., 2011), (Stolz and Moës, 2012), (Bernard et al., 2012).

Cette méthode est une alternative à d'autres méthodes de régularisation des modèles d'endommagement existantes, comme par exemple le modèle d'endommagement non local (Pijaudier-Cabot and Bazant, 1987), ou les modèles à gradient de déformations (Peerlings et al., 1996), pour remédier à la dépendance pathologique au maillage d'ordre élevé des calculs éléments-finis en cas de comportement adoucissant. Dans l'approche TLS, l'évolution du dommage est représentée par la propagation d'une courbe de niveau (level set) dont dépend la variable d'endommagement (paramètre du modèle). L'évolution du front d'endommagement, séparant les zones saine et dégradée dans la structure, est imposée par une quantité non locale intégrant en tout point du front des informations prises sur l'épaisseur de la bande endommagée ($d > 0$). Au-delà d'une certaine longueur critique à partir du front, le matériau est supposé complètement dégradé et une transition directe vers la fissuration est assurée en s'appuyant sur le formalisme X-FEM. La Figure 2.2 décrit les zones non endommagées, zones de transition et les zones complètement endommagées utilisant la TLS.

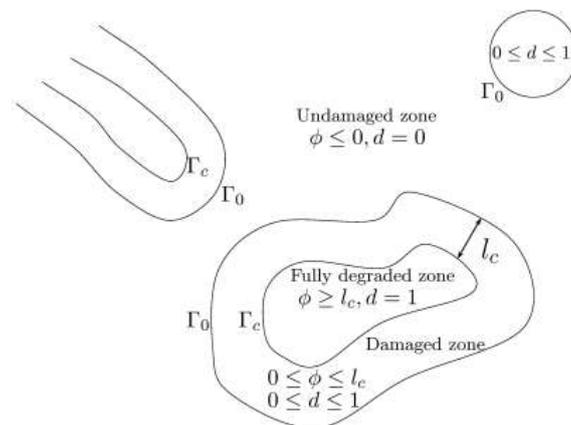


FIGURE 2.2 – Description des zones non endommagées, zones de transition et zones endommagées utilisant la TLS (Moës et al., 2011)

La TLS permet d'aborder des zones de fissuration à topologie complexe sans restrictions particulières et d'introduire des discontinuités de déplacement de façon naturelle. Elle permet ainsi de simuler des situations de branchement ou de coalescence de fissures. Dans cette approche, la fissure s'initie

naturellement comme une conséquence de l'avancée du front d'endommagement et ne nécessite pas de traitement particulier comme la prise en compte d'une fissure cohésive par exemple. Cependant, l'introduction de fissures inter-faciales partielles ne sont pas encore complètement établi, même s'il y a beaucoup de travaux prometteurs sur ce sujet (Van der Meer et al., 2012), (Ferté et al., 2014).

L'application de la méthode TLS dans le domaine des chaussées a commencé à être étudiée par (Chupin et al., 2016).

2.4 Le Modèle Multi-particulaire des Matériaux Multicouches : M4-5n

2.4.1 Introduction des modèles multiparticulaires

Historiquement, Pagano (Pagano, 1978) construit le modèle local, le plus complet des modèles multiparticulaires élastiques, à partir de la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner que nous rappellerons plus loin (Eq. 2.2). Dans ce modèle, chaque couche est modélisée par une plaque à 7 champs cinématiques (plaque du troisième ordre). Pagano fait apparaitre dans son modèle des efforts généralisés d'interface et souligne l'absence de singularités pour ces champs. Le modèle local est malgré tout un peu lourd à manipuler pour des multicouches constitués d'un grand nombre de couches. Pagano et Soni (Pagano and Soni, 1983) développent alors un modèle élastique plus opérationnel : le modèle global-local. Dans ce modèle, on privilégie certaines interfaces et les couches les plus proches de ces interfaces sont modélisées par le modèle local. Les couches restantes sont regroupées en paquets qui sont ensuite approchés par une plaque homogène. L'avantage de ce modèle global-local par rapport au modèle local est la diminution du nombre d'inconnues et la précision de ce modèle dépend du choix des interfaces privilégiées.

Pour analyser les champs de contrainte 3D provoquant un décollement des interfaces entre couches de matériaux composites, à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Naciri et al. (Naciri et al., 1998) s'inspirent des travaux de Pagano et construisent un modèle multiparticulaire plus complet que le Shear Lag mais plus simple que le modèle local de Pagano. Les équations sont encore obtenues par la méthode des puissances virtuelles.

En 1996, Chabot (Chabot, 1997), (Chabot and Ehrlacher, 1998) formalise ensuite la construction d'une famille de modèles multiparticulaires élastiques dits M4 (Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches), à partir des champs de contraintes 3D approchés, polynomiaux en z par couche et de la formulation d'Hellinger-Reissner (Reissner, 1950). Le modèle le plus complet est identique au modèle local de Pagano et on déduit à partir de celui-ci les autres modèles moyennant des approximations successives par exemple en prenant en compte la faible épaisseur des couches. Dans cette famille de modèles, on trouve le M4-5n comportant 5n champs cinématiques pour un multicouche à n couches (n : nombre de couches). Il est bien adapté aux problèmes de plaques multicouches travaillant en flexion (Chabot, 2013). Ces modèles font ainsi une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur

du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale tout en réduisant le problème étudié d'une dimension. En effet, avec les modèles multiparticulaires, ou nommés plus récemment layerwise plate models (Carraera and Ciuffreda, 2005), (Nguyen, 2012), le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplées à des efforts d'interface. Le multicouche devient ainsi un objet 2D dont chaque point géométrique est le siège d'une superposition de particules matérielles correspondant aux plaques modélisant les couches (on a donc autant de particules que de couches, Figure 2.3).

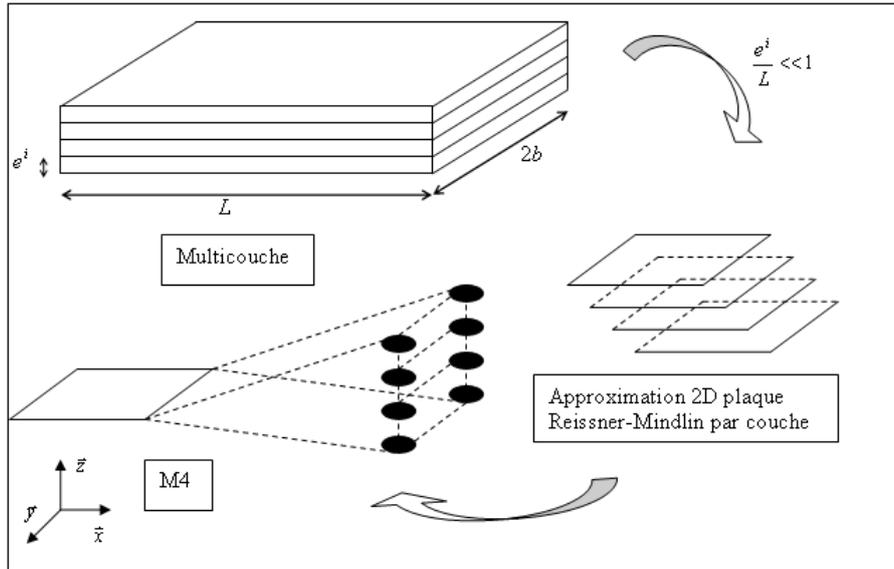


FIGURE 2.3 – Schéma de l'Approche multiparticulaire de multicouches (Le Corvec, 2008)

Le M4-5n approche chaque couche par une plaque de Reissner et fait figurer des efforts d'interface dans ses efforts généralisés. Ce modèle est validé par rapport aux éléments finis 3D pour le calcul des contraintes discontinues (fissure, interface entre deux couches) (Carreira, 1998), (Carreira et al., 1998). Diaz Diaz (Diaz Diaz, 2001) a adapté le M4-5n en prenant en compte des variations de température et des champs anélastiques constants dans chaque couche ainsi que des discontinuités d'interface. Un logiciel appelé DEILAM (Détermination des Efforts d'Interface dans un LAMiné) a été développé pour l'analyse du problème de bord libre. Divers travaux expérimentaux (Caron et al., 1999), (Chabot et al., 2000), (Diaz Diaz, 2001), (Hun, 2012), (Hun et al., 2012) ont montré la pertinence de critères de délaminage utilisant les valeurs de contraintes calculées au bord par les M4.

Tran (2004), (Guillo, 2004) étudie le problème de chaussée fissurée à l'aide du M4-5n. La chaussée est modélisée par un multiplaque M4-5n, et le sol par un massif semi-infini élastique de Boussinesq. Cette approche transforme le problème 3D de chaussée en un problème 2D. Le modèle simplifié obtenu, nommé M4-5nB, donne un système d'équations différentielles couplées avec un système d'équations intégrales. Le système d'équations est résolu par différence finie. Le modèle a montré son efficacité par comparaison avec des calculs éléments finis 3D. Dans l'objectif de développer un outil de calcul rapide

pour l'ingénieur, une solution est proposée ensuite en utilisant des ressorts Winkler (Westergaard, 1926) pour le sol. Le M4-5nW ainsi résultant, a été testée récemment et appliquée aux cas d'un bi-couche (Bürkli, 2010) et tricouche (Berthemet, 2012), (Berthemet and Chabot, 2013) en déformations planes. Les résultats ont montré que les champs de contraintes au niveau des interfaces entre couches du multicouche sont similaires à ceux obtenus par la simulation de la structure avec un sol de Bousinesq et par la méthode des éléments finis, loin de l'interface entre la chaussée et le sol. Dans ce cas, la solution M4-5nW est obtenue quatre fois (CPU) plus rapide que le M4-5nB et cinq fois plus rapide que celui obtenu par la méthode des éléments finis.

Le M4-5n est ainsi relativement bien adapté aux structures de chaussées par sa géométrie (avec ou sans fissure) (Tran, 2004), (Berthemet, 2012), (Berthemet and Chabot, 2013). Ce modèle présente l'avantage de conduire à des développements semi-analytiques autorisant des études paramétriques simples et rapides sans rencontrer de problème de singularité des contraintes aux bords libres et aux interfaces entre deux couches (Chabot et al., 2013), (Chabot, 2013). En effet, la valeur des champs mécaniques et des contraintes en ces endroits singuliers est finie permet une comparaison des différents cas d'études entre eux. L'introduction facile et simple des fissures est l'une des avantages de ce modèle puisqu'il propose une cinématique par couche au lieu d'une cinématique globale. Par exemple, pour introduire une fissure dans une couche donnée, il suffit d'introduire les conditions limites des bords libres pour cette couche. On a donc la possibilité d'introduire plusieurs fissures à la fois pour une même structure. Bien que ce modèle présente plusieurs avantages, le nombre d'inconnus et les calculs analytiques à effectuer restent assez importants. C'est pourquoi, il est nécessaire de pouvoir disposer d'outils de calcul formel tel que Mathematica utilisé dans cette thèse.

La construction des M4 repose sur la formulation mixte d'Hellinger-Reissner pour obtenir une approximation des déplacements et des contraintes 3D cohérente et pour déterminer les équations de ces modèles. Dans ce travail, il est question d'utiliser le M4-5n pour construire l'outil 3D d'analyse de des chaussées souhaité. Il nous semble donc pertinent de rappeler la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner des problèmes d'élasticité comme ci-dessous.

2.4.2 Formulation varationnelle d'Hellinger-Reissner

Considérons le problème d'élasticité et les notations suivantes :

Soit Ω un solide 3D de frontière $\partial\Omega$ (Figure 2.4).

- Le comportement du matériau constitutif de Ω est élastique linéaire hétérogène et la souplesse est donnée par le tenseur d'ordre 4 $\underline{\underline{S}}(\underline{x})$ au point \underline{x} .
- Il existe dans le solide un champs de déformation anélastique donné par $\underline{\underline{\varepsilon}}^{an}(\underline{x})$ au point \underline{x} .
- Il existe dans le solide une surface Γ orientée par son vecteur normal \underline{n} sur laquelle le champ de déplacement subit une discontinuité donnée par $\underline{\gamma}(\underline{x})$.
- Le déplacement est imposé sur une partie $\partial\Omega_U$ de la frontière avec la valeur $\underline{U}^d(\underline{x})$.
- Le vecteur contrainte est imposé sur la partie complémentaire $\partial\Omega_T = \partial\Omega - \partial\Omega_U$ avec la valeur $\underline{T}^d(\underline{x})$.
- Le solide est soumis au champs de forces volumiques $\underline{f}(\underline{x})$.

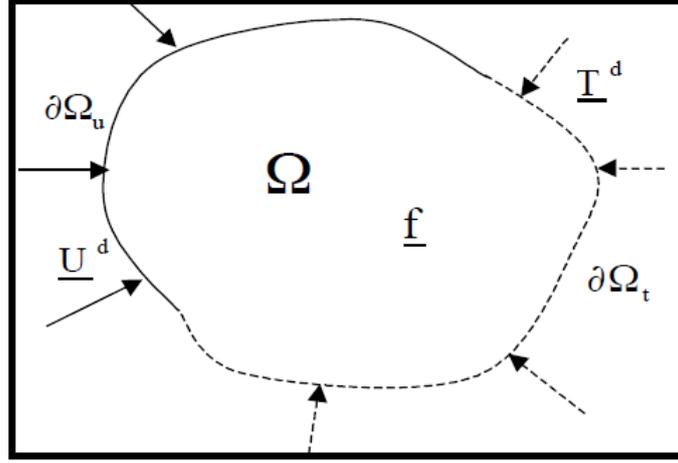


FIGURE 2.4 – Domaine 3D

Introduisons les notations suivantes :

- $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$: le tenseur des contraintes 3D en \underline{x}
- $\underline{\underline{\sigma}}^*$: un champ de tenseurs d'ordre 2 symétrique, de classe C^1 par morceau sur Ω
- $\underline{U}(\underline{x})$: le vecteur de déplacement 3D en \underline{x} .
- \underline{U}^* : un champ de vecteurs 3D continu sur Ω , de classe C^1 par morceau sur Ω
- $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*)$: Le champ de tenseurs des déformations 3D associé à \underline{U}^*

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*) = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\text{grad}}}\underline{U}^* + {}^T\overline{\overline{\text{grad}}}\underline{U}^*) \quad (2.1)$$

La fonctionnelle H.R. (Reissner, 1950), utilisées pour obtenir les équations du M4-5n en variables généralisées, s'écrit alors :

$$\begin{aligned} H.R.(\underline{U}^*, \underline{\underline{\sigma}}^*) = & \int_{\Omega} \left[\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}^*)(\underline{x}) - \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x})\underline{U}^*(\underline{x}) - \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \underline{\underline{S}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x}) \right] d\Omega \\ & - \int_{\partial\Omega_U} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n})(\underline{x})(\underline{U}^* - \underline{U}^d)(\underline{x})dS - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}^d(\underline{x})\underline{U}^*(\underline{x})dS - \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{n})(\underline{x}) \cdot \underline{\gamma}(\underline{x})dS \end{aligned} \quad (2.2)$$

Le théorème de Reissner est le suivant :

La solution du problème d'élasticité est le couple de champs $(\underline{U}, \underline{\underline{\sigma}})$ qui rend stationnaire la fonctionnelle H.R..

En effet, la stationnarité par rapport à une variation quelconque du champ de déplacement tridimensionnel \underline{U}^* donne les équations d'équilibre et les conditions aux limites en contraintes sur $\partial\Omega_T$:

- Équations d'équilibre quasi-statique :

$$\overline{\overline{\text{div}}}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) + \underline{f}(\underline{x}) = 0 \quad (2.3)$$

- Conditions aux limites :

$$(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})(\underline{x}) = \underline{T}^d(\underline{x}) \quad \text{sur } \partial\Omega_T \quad (2.4)$$

De même, la stationnarité par rapport à une variation quelconque du champ de contrainte tridimensionnel $\underline{\sigma}^*$ donne le comportement élastique linéaire et les conditions aux limites en déplacement sur $\partial\Omega_U$:

- Equation de comportement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) - \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}(\underline{x}) = \underline{\underline{S}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \quad (2.5)$$

- Conditions aux limites et de discontinuité :

$$\begin{cases} \underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^d(\underline{x}) & \text{sur } \partial\Omega_U \\ [\underline{U}](\underline{x}) = \underline{\gamma}(\underline{x}) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.6)$$

où $[\underline{U}]$ désigne la discontinuité de champs de déplacement \underline{U} à la surface de Γ .

Ces équations sont bien celles du problème d'élasticité posé plus haut.

Ci-après, on donne une brève description de la construction du M4-5n sous sa forme la plus complète.

2.4.3 Construction du M4-5n

Nous donnons ci-dessous les notations utilisées dans chaque couche i d'un multicouche de chaussées dont l'axe d'empilement se fait vers le bas (Figure 2.5)

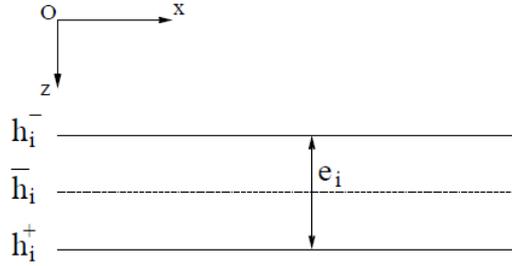


FIGURE 2.5 – Schéma de calcul du multicouche tridimensionnel

Où : \bar{h}_i et e^i sont respectivement la côte moyenne et l'épaisseur de la couche i .

$$\begin{cases} \bar{h}_i = \frac{h_i^+ + h_i^-}{2} \\ e^i = h_i^+ - h_i^- \end{cases}$$

Nous nommons h_i^+ et h_i^- respectivement les côtes inférieure et supérieure de la couche i suivant l'axe z normal au plan Oxy du multicouche. On note par des lettres grecques les indices des composantes des tenseurs dans le plan. Les couches sont ainsi numérotées du haut vers le bas de 1 à n .

Dans les multicouches, les surfaces de discontinuité potentielle sont les interfaces entre les couches. Ainsi $\Gamma = \cup_{i=1}^{n-1} \Gamma^{i,i+1}$, où $\Gamma^{i,i+1}$ est l'interface entre la couche i et la couche $i+1$. La discontinuité sur $\Gamma^{i,i+1}$ est noté $\underline{\gamma}^{i,i+1}$.

La couche i occupe le domaine $\Omega_i = \omega \times [h_i^-, h_i^+]$ (généralement $h_i^+ = h_{i+1}^-$). Notons $\partial\omega$ le bord de ω dans le plan Oxy, la frontière du multicouche est constituée de trois parties :

- La surface supérieure $\omega \times \{h_1^-\}$
- La surface inférieure $\omega \times \{h_n^+\}$
- Le bord $\partial\omega \times [h_1^-, h_n^+]$

La construction du modèle fait appel aux étapes suivantes :

- Définition des efforts généralisés
- Approximation des champs de contraintes sous forme polynomiale en z par couche. Les coefficients font intervenir les efforts intérieurs généralisés
- Introduction des champs de contraintes approchées dans la fonctionnelle H.R. et identification des déplacements généralisés et des déformations généralisées cohérentes avec l'approximation en contrainte
- Obtention des équations d'équilibre et des conditions aux limites sur les efforts intérieurs généralisés en rendant stationnaire la fonctionnelle H.R. pour une variation de déplacements généralisés
- Obtention des équations de comportement généralisées et des conditions aux limites en rendant stationnaire la fonctionnelle H.R. pour une variation des efforts généralisés

Le calcul détaillé des modèles multiparticulaire et surtout celui à 5n équations d'équilibre (M4-5n), modèle utilisé dans ce présent travail, est écrit dans Chabot (1997). Le M4-5n a été enrichi depuis par la prise en compte possible de champs anélastiques (Diaz Diaz, 2001) et de volume (Tran, 2004) comme énoncé précédemment, dans ce qui suit, une partie de la construction du M4-5n est reprise.

2.4.4 Equations du M4-5n

Le M4-5n peut être ainsi vu comme une superposition de n plaques de Reissner où chaque champ mécanique inconnu ne dépend que des variables de plan (x, y) . Sa construction repose sur une approximation par couche polynomiale des champs de contraintes membranaires $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ de degré 1 en z qui, par l'écriture des équations d'équilibre 3D, donne successivement pour les contraintes de cisaillement et la contrainte normale du degré 2 et 3 en z . Les coefficients de ces polynômes sont reliés aux champs d'efforts généralisés.

Nous approchons les contraintes dans le plan membranaire par des polynômes en z du premier degré. On les note $\sigma_{\alpha\beta}$ $((\alpha, \beta) \in \{1, 2\})$. En utilisant les équations d'équilibre 3D, nous déduisons que les degrés des polynômes en z approchant les contraintes $\sigma_{\alpha 3}$ et σ_{33} sont respectivement 2 et 3. On choisit les coefficients des polynômes qui apparaissent dans l'écriture des contraintes approchées de manière à faire intervenir les champs suivants qu'on appelle efforts intérieurs généralisés (Chabot, 1997), (Chabot and Ehrlacher, 1998) :

- le tenseur plan $N_{\alpha\beta}^i(x, y)$ d'ordre 2 des efforts membranaires de la couche i (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$N_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz; \quad (2.7)$$

— le tenseur plan $M_{\alpha\beta}^i(x, y)$ d'ordre 2 des moments de flexion de la couche i par rapport au plan médian de la couche (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$M_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz; \quad (2.8)$$

— le vecteur plan $Q_{\alpha}^i(x, y)$ d'effort tranchant de la couche i (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$Q_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}(x, y, z) dz; \quad (2.9)$$

— le vecteur plan $\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y)$ d'effort intérieur de cisaillement à l'interface $i, i+1$ (avec $1 \leq i \leq n$)

$$\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_i^+) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_{i+1}^-) \quad (2.10)$$

— le scalaire $\nu^{i,i+1}$ d'effort d'arrachement à l'interface $i, i+1$ (avec $1 \leq i \leq n$)

$$\nu^{i,i+1}(x, y) = \sigma_{33}(x, y, h_i^+) = \sigma_{33}(x, y, h_{i+1}^-) \quad (2.11)$$

Notons $f_{\alpha}(x, y, z)$ ($\alpha = [1, 2]$) et $f_3(x, y, z)$ respectivement les forces volumiques transversales et verticales. Dans un calcul, ces forces volumiques sont supposées connues. Désormais, pour simplifier l'écriture, nous notons :

- le vecteur plan des efforts membranaires des forces volumiques de la couche i :

$$F_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} f_{\alpha}(x, y, z) dz \quad \alpha = [1, 2] \quad (2.12)$$

- le vecteur plan des moments membranaires des forces volumiques de la couche i :

$$M_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) f_{\alpha}(x, y, z) dz \quad \alpha = [1, 2] \quad (2.13)$$

- le scalaire plan des efforts des forces volumiques hors plan de la couche i :

$$F_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} f_3(x, y, z) dz \quad (2.14)$$

- le scalaire plan des "moments" des forces volumiques hors plan de la couche i :

$$M_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) f_3(x, y, z) dz \quad (2.15)$$

- le scalaire plan des seconds "moments" des forces volumiques hors plan de la couche i :

$$MM_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\frac{e^{i2}}{12} - (z - \bar{h}_i)^2 \right) f_3(x, y, z) dz \quad (2.16)$$

Remarque :

Pour notre problème les chargements sont appliqués en haut de la première couche de chaussée, donc les composantes $\tau_1^{0,1}$, $\tau_2^{0,1}$, $\nu^{0,1}$ sont des données de chargement du pneu sur la chaussée. Pour les modèles classiques de multicouche, il en est de même pour les champs $\tau_1^{n,n+1}$, $\tau_2^{n,n+1}$, $\nu^{n,n+1}$ qui seront ici reliés au modèle de sol choisi par la suite.

L'approximation polynomiale des champs de contrainte dans la couche i est ainsi donnée ci-dessous :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{5n}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{1}{e^i} + \frac{12}{e^{i2}} M_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{5n}(x, y, z) &= Q_{\alpha}^i(x, y) \frac{1}{e^i} + (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \\ &+ \left(Q_{\alpha}^i(x, y) - \frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{i-1,i}(x, y)) \right) \frac{-6 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 + \frac{1}{2}}{e^i} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{5n}(x, y, z) &= \left(\frac{\nu^{i,i+1}(x, y) + \nu^{i-1,i}(x, y)}{2} + \frac{e^i}{12} (\tau_{\alpha'\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha'\alpha}^{i-1,i}(x, y)) + \frac{M_3^i(x, y)}{e^i} \right) \\ &+ \left(\frac{e^i}{10} (\tau_{\alpha'\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha'\alpha}^{i-1,i}(x, y)) - \frac{Q_{\alpha'\alpha}^i(x, y)}{5} + \nu^{i,i+1}(x, y) - \nu^{i-1,i}(x, y) - \frac{6MM_3^i(x, y)}{e^{i2}} \right) \frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \\ &+ \left(\frac{e^i}{12} (\tau_{\alpha'\alpha}^{i,i+1}(x, y) - \tau_{\alpha'\alpha}^{i-1,i}(x, y)) + \frac{M_3^i(x, y)}{e^i} \right) \left(-6 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \\ &+ \left(\frac{e^i}{2} (\tau_{\alpha'\alpha}^{i,i+1}(x, y) + \tau_{\alpha'\alpha}^{i-1,i}(x, y)) - Q_{\alpha'\alpha}^i(x, y) - \frac{30MM_3^i(x, y)}{e^{i2}} \right) \left(-2 \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right)^3 + \frac{3}{10} \left(\frac{z - \bar{h}_i}{e^i} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

En injectant ce champ de contrainte $\sigma^{5n}(x, y, z)$ dans la fonctionnelle, par dualité, il est alors possible de définir les déformations associées aux efforts généralisés du M4-5n : $N_{\alpha\beta}^i(x, y)$, $M_{\alpha\beta}^i(x, y)$, $Q_{\beta}^i(x, y)$, $\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y)$ et $\nu^{i,i+1}(x, y)$.

Les déplacements généralisés de la couche i du M4-5n sont ainsi définis comme suit, $i \in \{1, n\}$ et $\alpha \in \{1, 2\}$:

Déplacements membranaires moyens de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$U_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e^i} U_{\alpha}(x, y, z) dz \quad (2.20)$$

et

$$U_{\alpha}(x, y, z) = U_{\alpha}^i(x, y) + (z - \bar{h}_i) \phi_{\alpha}^i(x, y) + \Delta U_{\alpha}^i(x, y, z) \quad (2.21)$$

Rotations moyennes de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\Phi_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12(z - \bar{h}_i)}{e^{i3}} U_{\alpha}(x, y, z) dz \quad (2.22)$$

Déplacement vertical moyen de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$U_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e^i} U_3(x, y, z) dz \quad (2.23)$$

et

$$U_3(x, y, z) = U_3^i(x, y) + \Delta U_3^i(x, y, z) \quad (2.24)$$

Les définitions des déformations généralisées sont :

Déformations membranaires de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i(x, y) = \frac{1}{2}(U_{\alpha'\beta}^i(x, y) + U_{\beta'\alpha}^i(x, y)) \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (2.25)$$

Courbures de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\chi_{\alpha\beta}^i(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi_{\alpha'\beta}^i(x, y) + \Phi_{\beta'\alpha}^i(x, y)) \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (2.26)$$

Déformation de cisaillement de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$d_{\Phi\alpha}^i(x, y) = \Phi_{\alpha}^i(x, y) + U_{3'\alpha}(x, y) \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (2.27)$$

Déformation de cisaillement de l'interface $i, i+1$ ($i \in [1, n-1]$) :

$$D_{\alpha}^{i, i+1}(x, y) = U_{\alpha}^{i+1}(x, y) - U_{\alpha}^i(x, y) - \frac{e^i}{2}\Phi_{\alpha}^i(x, y) - \frac{e^{i+1}}{2}\Phi_{\alpha}^{i+1}(x, y) \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (2.28)$$

Déformation normale de l'interface $i, i+1$ ($i \in [1, n-1]$) :

$$D_3^{i, i+1}(x, y) = U_3^{i+1}(x, y) - U_3^i(x, y) \quad (2.29)$$

Nous donnons les définitions des déformations généralisées anélastiques :

Déformations membranaires anélastiques de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{ian}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e^i} \varepsilon_{\alpha\beta}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (2.30)$$

Courbures anélastiques de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\chi_{\alpha\beta}^{ian}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12(z - \bar{h}_i)}{e^{i3}} \varepsilon_{\alpha\beta}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (2.31)$$

Déformation de cisaillement anélastique perpendiculaire au plan de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$d_{\Phi\alpha}^{ian}(x, y) = 2 \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e^i} \varepsilon_{\alpha 3}^{an}(x, y, z) dz \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (2.32)$$

Glissement anélastique de l'interface $i, i+1$ ($i \in [1, n]$) :

$$D_{\alpha}^{i, i+1an}(x, y) = \gamma_{\alpha}^{i, i+1}(x, y) \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (2.33)$$

Déformation normale de l'interface $i, i+1$ ($i \in [1, n]$) :

$$D_3^{i, i+1an}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{h_i^-}^{h_i^+} \varepsilon_{33}^{an}(x, y, z) dz + \frac{1}{2} \int_{h_{i+1}^-}^{h_{i+1}^+} \varepsilon_{33}^{an}(x, y, z) dz + \gamma_3^{i, i+1}(x, y) \quad (2.34)$$

Dans ces deux dernières équations (Eq. 2.33 et 2.34), les déformations anélastiques à l'interface $n, n+1$ peuvent représenter les possibles discontinuités pouvant exister entre la dernière couche de chaussée et la surface du massif de sol.

Notons que les déformations anélastiques généralisées $\varepsilon_{\alpha\beta}^{ian}$, $\chi_{\alpha\beta}^{ian}$, $d_{\Phi\alpha}^{ian}$, $D_\alpha^{j, j+1ian}$, $D_3^{j, j+1ian}$ sont supposées connues.

Après avoir introduit les champs de contraintes approchés dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner 2.2, puis identifié les champs de déformations généralisées, les équations d'équilibre et les équations de comportement du modèle s'obtiennent en rendant stationnaire la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner pour une variation des déplacements généralisés et des efforts généralisés.

Les équations d'équilibre du M4-5n relient ainsi les inconnues statiques entre elles. Elles sont définies ainsi pour chaque couche i , $i \in \{1, n\}$ et $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$:

- Les $5n$ équations d'équilibre de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$N_{\alpha\beta'\beta}^i(x, y) + \tau_\alpha^{i, i+1}(x, y) - \tau_\alpha^{i-1, i}(x, y) + F_\alpha^i(x, y) = 0 \quad (2.35)$$

$$M_{\alpha\beta'\beta}^i(x, y) - Q_\alpha^i(x, y) + \frac{e^i}{2} (\tau_\alpha^{i, i+1}(x, y) + \tau_\alpha^{i-1, i}(x, y)) + M_\alpha^i(x, y) = 0 \quad (2.36)$$

$$Q_{\alpha'\alpha}^i(x, y) + \nu^{i, i+1}(x, y) - \nu^{i-1, i}(x, y) + F_3^i(x, y) = 0 \quad (2.37)$$

Les équations de comportement s'écrivent dans les couches i et sur les interfaces

- Les $8n$ équations de comportement de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i(x, y) - \varepsilon_{\alpha\beta}^{ian}(x, y) = \frac{S_{\alpha\beta\delta\gamma}^i}{e^i} N_{\delta\gamma}^i(x, y) \quad (2.38)$$

$$\chi_{\alpha\beta}^i(x, y) - \chi_{\alpha\beta}^{ian}(x, y) = \frac{12S_{\alpha\beta\delta\gamma}^i}{e^{i3}} M_{\delta\gamma}^i(x, y) \quad (2.39)$$

$$d_{\Phi\alpha}^i(x, y) - d_{\Phi\alpha}^{ian}(x, y) = \frac{6}{5e^i} 4S_{\alpha3\beta3}^i Q_\alpha^i(x, y) - \frac{1}{10} 4S_{\alpha3\beta3}^i (\tau_\alpha^{i, i+1}(x, y) + \tau_\alpha^{i-1, i}(x, y)) \quad (2.40)$$

- Les $3(n-1)$ équations de comportement d'interface $i, i+1$ ($i \in [1, n-1]$) :

$$D_\alpha^{i, i+1}(x, y) - D_\alpha^{i, i+1an}(x, y) = -\frac{1}{10} 4S_{\alpha3\beta3}^i Q_\beta^i(x, y) - \frac{1}{10} 4S_{\alpha3\beta3}^{i+1} Q_\beta^{i+1}(x, y) \quad (2.41)$$

$$-\frac{e^i}{30} 4S_{\alpha3\beta3}^i \tau_\beta^{i-1, i}(x, y) + \frac{2}{15} (e^i 4S_{\alpha3\beta3}^i + e^{i+1} 4S_{\alpha3\beta3}^{i+1}) \tau_\beta^{i, i+1}(x, y) - \frac{e^{i+1}}{30} 4S_{\alpha3\beta3}^{i+1} \tau_\beta^{i+1, i+2}(x, y) \quad (2.42)$$

$$D_3^{i, i+1}(x, y) - D_3^{i, i+1an}(x, y) = \frac{9}{70} e^i S_{3333}^i \nu^{i-1, i}(x, y) + \frac{13}{35} (e^i S_{3333}^i + e^{i+1} S_{3333}^{i+1}) \nu^{i, i+1}(x, y) + \frac{9}{70} e^{i+1} S_{3333}^{i+1} \nu^{i+1, i+2}(x, y)$$

Les matrices de souplesse élastiques liées au module d'Young E^i , au coefficient de Poisson ν^i et au module de cisaillement G^i de chaque couche i s'écrivent :

$$(\tilde{\tilde{S}}^i)_{\alpha\beta\gamma\delta} = S'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{pmatrix} S_{1111}^i & S_{1122}^i & 2S_{1112}^i \\ S_{2211}^i & S_{2222}^i & 2S_{2212}^i \\ 2S_{1211}^i & 2S_{1222}^i & 4S_{1212}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E^i} & -\frac{\nu^i}{E^i} & 0 \\ -\frac{\nu^i}{E^i} & \frac{1}{E^i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G^i} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

$$(\tilde{S}_Q^i)_{\alpha\beta} = 4S'_{\alpha 3 \gamma 3} = \begin{pmatrix} 4S_{1313}^i & 4S_{1323}^i \\ 4S_{2313}^i & 4S_{2323}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{G^i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G^i} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$S_\nu^i = S'_{3333} = \frac{1}{E^i} \quad ; \quad G^i = \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \quad (2.45)$$

Ainsi, si toutes les couches sont constituées de matériaux isotropes de module d'Young E^i , de coefficient de Poisson ν^i , les équations 2.38 à 2.42 s'écrivent sous la forme suivante :

Les 8n équations 2.38-2.40 de la couche i ($i \in [1, n]$) :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^i - \varepsilon_{11}^{ian} \\ \varepsilon_{22}^i - \varepsilon_{22}^{ian} \\ 2\varepsilon_{12}^i - 2\varepsilon_{12}^{ian} \end{pmatrix} = \frac{1}{e^i} \begin{pmatrix} \frac{1}{E^i} & \frac{-\nu^i}{E^i} & 0 \\ \frac{-\nu^i}{E^i} & \frac{1}{E^i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu^i)}{E^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11}^i \\ N_{22}^i \\ N_{12}^i \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{11}^i - \chi_{11}^{ian} \\ \chi_{22}^i - \chi_{22}^{ian} \\ 2\chi_{12}^i - 2\chi_{12}^{ian} \end{pmatrix} = \frac{12}{e^{3i}} \begin{pmatrix} \frac{1}{E^i} & \frac{-\nu^i}{E^i} & 0 \\ \frac{-\nu^i}{E^i} & \frac{1}{E^i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu^i)}{E^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11}^i \\ M_{22}^i \\ M_{12}^i \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$d_{\Phi 1}^i - d_{\Phi 1}^{ian} = \frac{12(1+\nu^i)}{5e^i E^i} Q_1^i - \frac{1+\nu^i}{5E^i} (\tau_1^{i,i+1} + \tau_1^{i-1,i}) \quad (2.48)$$

$$d_{\Phi 2}^i - d_{\Phi 2}^{ian} = \frac{12(1+\nu^i)}{5e^i E^i} Q_2^i - \frac{1+\nu^i}{5E^i} (\tau_2^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i}) \quad (2.49)$$

Les 3(n-1) équations de comportement des interfaces 2.41 à 2.42 donnent 3(n-1) équations algébriques ($i \in [1, n-1]$) :

$$D_1^{i,i+1} - D_1^{i,i+1an} = -\frac{1+\nu^i}{5E^i} Q_1^i - \frac{1+\nu^{i+1}}{5E^{i+1}} Q_1^{i+1} - \frac{e^i(1+\nu_i)}{15E^i} \tau_1^{i-1,i} \quad (2.50)$$

$$+ \frac{2}{15} \left(\frac{2e^i(1+\nu^i)}{E^i} + \frac{2e^{i+1}(1+\nu^{i+1})}{E^{i+1}} \right) \tau_1^{i,i+1} - \frac{e^{i+1}(1+\nu^{i+1})}{15E^{i+1}} \tau_1^{i+1,i+2}$$

$$D_2^{i,i+1} - D_2^{i,i+1an} = -\frac{1+\nu^i}{5E^i} Q_2^i - \frac{1+\nu^{i+1}}{5E^{i+1}} Q_2^{i+1} - \frac{e^i(1+\nu_i)}{15E^i} \tau_2^{i-1,i} \quad (2.51)$$

$$+ \frac{2}{15} \left(\frac{2e^i(1+\nu^i)}{E^i} + \frac{2e^{i+1}(1+\nu^{i+1})}{E^{i+1}} \right) \tau_2^{i,i+1} - \frac{e^{i+1}(1+\nu^{i+1})}{15E^{i+1}} \tau_2^{i+1,i+2}$$

$$D_3^{i,i+1} - D_3^{i,i+1an} = \frac{9e^i}{70E^i} \nu^{i-1,i} + \frac{13}{35} \left(\frac{e^i}{E^i} + \frac{e^{i+1}}{E^{i+1}} \right) \nu^{i,i+1} + \frac{9e^{i+1}}{70E^{i+1}} \nu^{i+1,i+2} \quad (2.52)$$

Le M4-5n a une cinématique à 5n champs de déplacements $U_\alpha^i(x, y)$, $U_3^i(x, y)$, $\Phi_\alpha^i(x, y)$, identique à celle de n plaques de Reissner (une par couche).

Conditions aux limites sur les surfaces des plaques M4-5n

Supposons que les efforts $\tau_\alpha^{0,1}$, $\tau_\alpha^{n,n+1}$, $\nu^{0,1}$ et $\nu^{n,n+1}$ soient des données. Si nous notons T_k^- (respectivement T_k^+) $k \in \{1, 3\}$ la composante suivant k du vecteur contrainte imposé sur la face externe inférieure (respectivement supérieure) du multicouche, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1^{0,1}(x, y) = -T_1^-(x, y) \\ \tau_2^{0,1}(x, y) = -T_2^-(x, y) \\ \nu^{0,1}(x, y) = -T_3^-(x, y) \end{array} \right. \quad \text{respectivement} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_1^{n,n+1}(x, y) = T_1^+(x, y) \\ \tau_2^{n,n+1}(x, y) = T_2^+(x, y) \\ \nu^{n,n+1}(x, y) = T_3^+(x, y) \end{array} \right. \quad (x, y) \in \omega \quad (2.53)$$

Rappelons que dans notre problème, en dessous de la couche n , il y a le sol. Comme nous verrons dans la suite, les composantes $\tau_\alpha^{n,n+1}, \nu^{n,n+1}$ deviennent donc des inconnues qu'il est nécessaire de déterminer.

Conditions aux limites aux bords des plaques M4-5n

Notons T_k^d les composantes suivant k ($k \in (1, 3)$) des efforts imposés sur le bord du multicouche, les conditions aux limites en contraintes du M4-5n s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{\alpha\beta}^i(x, y)n_\beta(x, y) = T_\alpha^{di}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_\alpha^d(x, y, z)dz \quad \forall(x, y) \in \partial\omega_T \\ M_{\alpha\beta}^i(x, y)n_\beta(x, y) = M_\alpha^{di}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i)T_\alpha^d(x, y, z)dz \quad \forall(x, y) \in \partial\omega_T \\ Q_\beta^i(x, y)n_\beta(x, y) = Q^{di}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d(x, y, z)dz \quad \forall(x, y) \in \partial\omega_T \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Où $\partial\omega_T$ est la partie du bord $\partial\omega$ du multicouche où les forces sont imposées.

n_β sont les composantes du vecteur du plan normal au bord de notre multicouche.

De la même façon, si nous notons u_k^d les composantes données du déplacement suivant k ($k \in (1, 3)$), nous aurons dans l'approximation cohérente avec notre modèle les conditions limites sur les bords du multicouche en déplacement comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_\alpha^i(x, y) = \frac{1}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} U_\alpha^d(x, y, z)dz \quad \forall(x, y) \in \partial\omega_U \\ \Phi_\alpha^i(x, y) = \frac{12}{e^{i3}} \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i)U_\alpha^d(x, y, z)dz \quad \forall(x, y) \in \partial\omega_U \\ U_3^i(x, y) = \frac{1}{e^i} \int_{h_i^-}^{h_i^+} U_3^d(x, y, z)dz \quad \forall(x, y) \in \partial\omega_U \end{array} \right. \quad (2.55)$$

Où $\partial\omega_U$ est la partie du bord $\partial\omega$ du multicouche où les déplacements sont imposés.

Avec ce modèle, deux cas peuvent être examinés (Figure 2.6) :

- Soit les couches du multicouche sont considérées comme infinies dans le plan. Dans le calcul numérique, à une très grande distance de la charge, nous pouvons considérer les champs de déplacements et contraintes très petits et négligeables. Par la nature du travail en flexion du multicouche de chaussée,

la fixation du déplacement transversal sera mieux adaptée que celle du déplacement vertical (afin de ne pas perdre de l'énergie en flexion par rapport à une vraie structure infinie). On utilise ainsi les conditions aux limites classiques des chaussées, c'est-à-dire bloquée transversalement à la limite, avec toutes les contraintes de cisaillement nulles.

- Soit les couches du multicouches sont finies. Pour les chaussées souples, cela consiste à considérer qu'elles sont infinies dans le sens longitudinal (donc bloquées, comme dans le premier cas) et avec des bords libres dans le sens transversal (les efforts appliqués au bords sont nuls).

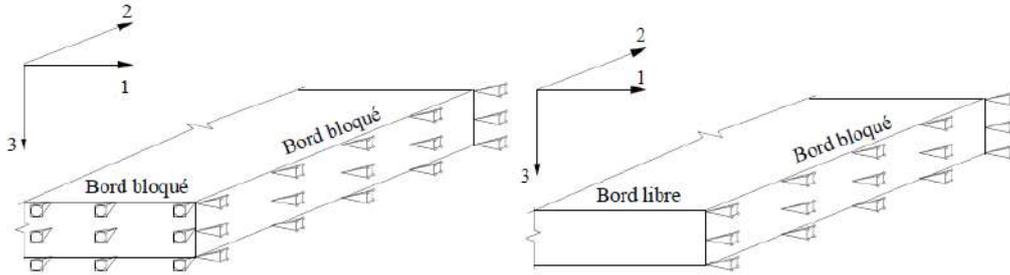


FIGURE 2.6 – Conditions limites aux bords de la chaussée(Tran, 2004)

Dans le cas de chaussées béton à dalles, il faut alors prendre en compte dans les deux directions les conditions de bords libre.

D'après les Eq.s 2.54 et 2.55, ces conditions sur les inconnues du M4-5n deviennent :

Bords bloqués :

- Quand x tend vers l'infini, quelque soit y , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} U_1^i(x, y) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_1^i(x, y) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} N_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} U_{2'1}^i(x, y) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} M_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_{2'1}^i(x, y) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} Q_1^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e^i E^i}{12(1 + \nu^i)} U_{3,1}^i(x, y) + \frac{e^i}{12} \tau_1^{i-1,i}(x, y) + \frac{e^i}{12} \tau_1^{i,i+1}(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad (2.56)$$

- Quand y tend vers l'infini, quelque soit x , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{y \rightarrow +\infty} U_2^i(x, y) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \phi_2^i(x, y) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} N_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} U_{1'2}^i(x, y) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} M_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} \phi_{1'2}^i(x, y) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} Q_2^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e^i E^i}{12(1+v^i)} U_{3,1}^i(x, y) + \frac{e^i}{12} \tau_2^{i-1,i}(x, y) + \frac{e^i}{12} \tau_2^{i,i+1}(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad (2.57)$$

Bords libres :

- Quand x tend vers l'infini, quelque soit y , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} N_{11}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (U_{1'1}^i(x, y) + \nu^i U_{2'2}^i(x, y)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} M_{11}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\phi_{1'1}^i(x, y) + \nu^i \phi_{2'2}^i(x, y)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} N_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (U_{1'2}^i(x, y) + U_{2'1}^i(x, y)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} M_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\phi_{1'2}^i(x, y) + \phi_{2'1}^i(x, y)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} Q_1^i(x, y) = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e^i E^i}{12(1+v^i)} \phi_1^i(x, y) + \frac{5e^i E^i}{12(1+v^i)} U_{3,1}^i(x, y) + \frac{e^i}{12} \tau_1^{i-1,i}(x, y) + \frac{e^i}{12} \tau_1^{i,i+1}(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad (2.58)$$

- Quand y tend vers l'infini, quelque soit x , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{y \rightarrow +\infty} N_{22}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} (\nu^i U_{1'1}^i(x, y) + U_{2'2}^i(x, y)) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} M_{22}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} (\nu^i \phi_{1'1}^i(x, y) + \phi_{2'2}^i(x, y)) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} N_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} (U_{1'2}^i(x, y) + U_{2'1}^i(x, y)) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} M_{12}^i(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} (\phi_{1'2}^i(x, y) + \phi_{2'1}^i(x, y)) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} Q_2^i(x, y) = 0 \\ \Rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{5e^i E^i}{12(1+v^i)} \phi_2^i(x, y) + \frac{5e^i E^i}{12(1+v^i)} U_{3,1}^i(x, y) + \frac{e^i}{12} \tau_2^{i-1,i}(x, y) + \frac{e^i}{12} \tau_2^{i,i+1}(x, y) = 0 \end{array} \right. \quad (2.59)$$

Expression de l'énergie élastique du M4-5n

Appliquée aux structures multicouches, les effets Poisson dus au "pincement" des couches (considérées plaques) et quelques termes compliquant les énergies dues aux efforts normaux sont considérés à contributions énergétiques faibles (Chabot, 1997), (Carreira, 1998).

L'énergie de déformation élastique W_e du M4-5n s'exprime alors en fonction des termes suivants, $i \in \{1, n\}$ (Eq. 4.10)

$$W_e(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left(w_c^{5n^i} + w_\nu^{5n^i} + w_Q^{5n^i} \right) dS \quad (2.60)$$

où

— $w_c^{5n^i}$ est l'énergie élastique des efforts membranaires de la couche i :

$$w_c^{5n^i} = \frac{1}{2} (\tilde{N}^i : \frac{\tilde{S}^i}{e^i} : \tilde{N}^i + \tilde{M}^i : \frac{12\tilde{S}^i}{e^{i3}} : \tilde{M}^i) \quad (2.61)$$

— $w_\nu^{5n^i}$ est l'énergie élastique des efforts normaux à la couche i :

$$w_\nu^{5n^i} = \frac{1}{2} S_\nu^i \left[\frac{e^i}{4} \left(\frac{\nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i}}{2} \right)^2 + \frac{17e^i}{140} (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i})^2 \right] \quad (2.62)$$

— $w_Q^{5n^i}$ est l'énergie élastique du cisaillement perpendiculaire au plan de la couche i :

$$w_Q^{5n^i} = \frac{1}{2} \left[\tilde{Q}^i \cdot \frac{\tilde{S}_Q^i}{e^i} \cdot \tilde{Q}^i + (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \frac{\tilde{S}_Q^i e^i}{12} \cdot (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right. \\ \left. + \left(\tilde{Q}^i - \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \frac{\tilde{S}_Q^i}{5e^i} \cdot \left(\tilde{Q}^i - \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \right] \quad (2.63)$$

La définition des matrices de souplesse liées au module d'Young E^i , au coefficient de Poisson ν^i et au module de cisaillement G^i de chaque couche i sont donnés par les Eq.s 2.43, 2.44 et 2.45.

2.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une revue des différents modèles utilisés pour prendre en compte les discontinuités tel les fissures et les interfaces dans ces structures multicouches. Les modèles et méthodes numériques utilisées pour modéliser les structures fissurées ne sont pas toutes équivalentes. Les méthodes utilisant les méthodes aux éléments finis classiques (reposant sur des approximations en déplacement) montrent certaines limites face à ce type d'analyse. Bien que la fissure est décrite explicitement (mais on ne peut pas l'initier), le maillage très fin et les champs singuliers autour de la fissure représentent une limitation de ces méthodes. La méthode des éléments de frontière est une solution pour le problème de maillage puisque le bord et les lèvres de la fissure sont seulement discrétisés, mais les problèmes numériques de cette méthode limitent son intérêt. Les méthodes sans maillage semblent être dans ce contexte une alternative attrayante, bien que leur usage reste peu répandu, et que leur couplage avec la méthode des éléments finis traditionnels demande des développements coûteux. Enfin, les méthodes basées sur la partition de l'unité permettent de réaliser des simulations efficaces et bien adaptées à ce type de problème.

Pour le traitement du contact entre deux solides, nous avons les méthodes sans et avec régularisation. Les méthodes sans régularisation, bien que simples à implémenter, accepte une légère pénétration d'un corps dans un autre. Les méthodes avec régularisation permettent de résoudre ce problème en introduisant un coefficient de pénalité fini.

Alternativement, nous avons vu qu'il existe des modèles avancés utilisés récemment pour la modélisation des structures fissurées tel que le TLS et le M4-5n. Le TLS, bien qu'il résout le problème de maillage près des fissures et permet l'introduction aisée des fissures et des discontinuités interfaciales complètes, ne permet pas aisément l'introduction des discontinuités interfaciales partielles. En plus, ce modèle n'est pas implémenté dans un outil de calcul rapide et simple d'utilisation.

Le M4-5n, mieux adapté à la modélisation des structures multicouches fissurées (verticalement dans les couches ou sur les interfaces), permet de résoudre les problèmes de singularités en donnant des valeurs finies des champs de contraintes d'interface aux bords libres (fissures verticales au bord de dalles). Il permet l'introduction aisée de discontinuités interfaciales partielles et complètes. Malgré ses différents avantages, ce modèle nécessite des calculs analytiques importants. Comme la méthode TLS, ce modèle n'est pas implémenté dans un outil de calcul rapide et simple d'utilisation. Ceci fait l'objet de cette présente thèse.

Bilan général et Objectifs de la thèse

Après avoir décrit les matériaux et les structures de chaussées, nous avons vu dans le premier chapitre que la méthode de dimensionnement française des chaussées, construite sur le modèle de Burmister, est limitée pour prendre en compte des discontinuités types fissures verticales ou décollements (partiel et total) entre couches. En effet, elle permet de ne prendre en compte que d'une manière implicite un glissement total entre couche est possible d'une façon explicite. Cette méthode prend en compte la viscoélasticité des matériaux dans les structures de chaussées à l'aide de modèle équivalent à une vitesse de charge et température du matériau donné.

Le logiciel Alizé, mis au point par le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées dans le passé utilise le modèle axisymétrique de Burmister et différents coefficients calés sur des calculs aux éléments finis ou expérimentations en vraie grandeur notamment pour les chaussées béton. A l'IFSTTAR, le logiciel ViscoRoute[©], intégrant directement les lois de comportement viscoélastique des matériaux bitumineux pour l'étude des chaussées souples à faible trafic ou soumises à de forts gradients thermiques (Heck et al., 1998), améliore et précise les mécanismes de distribution des contraintes dans la structure (Duhamel et al., 2005b) (Chabot et al., 2010) (Chupin et al., 2010). Ce dernier logiciel permet ainsi de modéliser d'une manière semi analytique les structures multicouches 3D semi-infinies non fissurées sous passage de charges roulantes, avec des interfaces collées (version 2.0) ou totalement glissantes (version 2.1) (Hammoum et al., 2010), (Chupin et al., 2013). Cependant ce modèle 3D résolvant les équations dans le repère de la charge roulante exige une continuité de l'espace c.à.d ni une fissure verticale ni un décollement partiel ne peuvent être traités par ce logiciel.

Parmi les méthodes et modèles existants pouvant décrire explicitement l'existence de fissures verticales ou des décollements d'interfaces dans les structures multicouches, la méthode aux éléments finis (reposant sur des approximations en déplacement) reste classiquement utilisée. Bien que la fissure soit décrite explicitement (mais on ne peut pas l'initier) dans cette méthode, le maillage très fin et les champs singuliers autour de la fissure représentent une limitation surtout en 3D pour l'ingénieur de bureaux d'études qui souhaite investiguer de façon paramétrique plusieurs configurations et scénarios de chaussées dégradées.

Alternativement, nous avons vu qu'il existe des modèles avancés utilisés récemment pour la modélisation des structures fissurées tel que la méthode TLS et le M4-5n. Bien qu'elle résolve le problème de maillage

près des fissures et permet l'introduction aisée des fissures et des discontinuités interfaciales complètes, la méthode TLS ne permet pas aisément l'introduction des discontinuités interfaciales partielles. En plus, ce modèle n'est pas implémenté dans un outil de calcul rapide et simple d'utilisation. Le M4-5n, mieux adapté à la modélisation des structures multicouches fissurées, permet de résoudre les problèmes de singularités. Il permet aussi l'introduction aisée des discontinuités interfaciales partielles et complètes. Malgré ses différents avantages, ce modèle nécessite des calculs analytiques importants et n'est pas encore implémenté dans un outil de calcul rapide et simple d'utilisation.

Dans l'objectif de bâtir un outil de calcul en 3D "rapide" et simple d'utilisation pour être livré aux ingénieurs de bureau d'études, le travail de cette thèse consiste à développer la méthode de résolution complète implémentée dans ce dernier. L'outil doit être capable d'analyser les états de contrainte dans les structures de chaussées comportant soit des fissures verticales soit des discontinuités et des décollements/ glissement (total ou partiel) entre couches afin de simuler et d'étudier d'une manière paramétrique et rapide différents scénarios de rupture possibles dans des chaussées dégradées. Il doit aussi analyser la tenue et les pathologies rencontrées, aider à proposer des solutions de renforcements plus durables et aider à l'analyse des distributions des champs de contrainte pour les chaussées du futur (route de cinquième génération R5G) en vue d'aider à les concevoir et les dimensionner durablement.

Nous proposons dans ce travail de baser l'outil visé sur le M4-5n. Afin de résoudre les équations du M4-5n, deux méthodes de résolution seront ainsi utilisées : la méthode des différences finis utilisée dans les travaux précédents pour les chaussées et la méthode aux éléments finis mixtes.

La méthode des différences finis est tout d'abord choisie afin de finaliser les travaux précédents réalisés par l'équipe d'encadrement de l'IFSTTAR. Dans sa thèse, Tran (2004) a montré l'efficacité de cette méthode de résolution des équations du M4-5n par comparaison avec des calculs éléments finis 3D. Il propose que les chaussées fissurées soient modélisées par un multicouche M4-5n et le sol par un massif semi-infini élastique de Boussinesq (M4-5nB). Cependant, bien que plus rapide qu'un calcul éléments finis 3D, la modélisation du sol par le massif de Boussinesq alourdit le calcul. Une solution plus rapide en utilisant des ressorts Winkler (Westergaard, 1926) pour le sol, nommé M4-5nW, a été testée ultérieurement et appliquée aux cas d'un bicouche (Bürkli, 2010) et tricouche (Berthemet, 2012), (Berthemet and Chabot, 2013) en déformations planes. Les résultats ont montré que les champs de contraintes au niveau des interfaces entre couches du haut du multicouche sont similaires à ceux obtenus par la simulation de la structure avec un sol de Boussinesq et par la méthode aux éléments finis, loin de l'interface entre la chaussée et le sol. La modélisation du sol par un massif de ressorts (massif de Winkler) bien que très simple à utiliser et rapide, rend nul les efforts de cisaillement entre le sol et la structure, alors qu'en réalité ils ne le sont pas. Pour améliorer la modélisation et ainsi avoir de meilleures approximations des champs mécaniques près du sol tout en gardant cette simplicité de modélisation, on ajoute, dans ce travail, une couche de M4-5n au massif de ressorts assurant ainsi le transfert des contraintes de cisaillements de la chaussée au massif de Winkler. On obtient ainsi un multicouche formé de 4 couches : 3 couches pour modéliser la chaussée et 1 couche dite "de cisaillement"

ajoutée aux ressorts de Winkler pour modéliser le sol dans cette thèse. Le nouveau modèle M4-5nW ainsi développé en déformations planes est implémenté dans Scilab. Il constitue un cas de référence 2D pour valider la méthode de résolution à l'aide des éléments finies mixtes proposée plus tard dans le chapitre 4 et utilisant le logiciel FreeFem++ (Hecht, 2011). Ce travail a fait l'objet d'une conférence nationale (Nasser and Chabot, 2015a), d'une conférence internationale (Nasser and Chabot, 2015b) et d'une proposition d'un article de journal (Nasser and Chabot, 2016).

En 2004, (Nguyen, 2004) en reprenant les travaux de (Diaz Diaz, 2001) a proposé un outil pour l'analyse globale-locale des structures multicouches basé sur le M4-5n (MPFEAP : MultiParticle Finite Element Analysis Program). Un élément fini de plaque isoparamétrique à 8 nœuds basé sur le M4-5n a été développé. A l'aide de ce travail de thèse et celui de (Duong, 2008), (Nguyen, 2012) a tenté d'intégrer ces développements dans Abaqus. Cet outil éléments finis repose sur une approche en déplacement alors que le M4-5n est basé sur une formulation de type Hellinger-Reissner mixte en contrainte et déplacement. D'où l'objectif du travail proposé in fine de construire un outil M4-5n à l'aide des éléments finis mixtes.

Chapitre 3

Construction d'un outil de calcul 2D de référence de chaussées fissurées - Résolution du M4-5nW par la méthode aux différences finies (DF)

Dans ce chapitre, nous reprenons et finalisons en 2D déformations planes, dans un premier temps, les travaux de (Tran, 2004) et (Chabot et al., 2005) en simplifiant la modélisation du sol pour optimiser encore le temps de calcul proposé dans les travaux de stages de (Bürkli, 2010) et (Berthemet, 2012), (Berthemet and Chabot, 2013) afin de construire un cas de référence complet en 2D déformations planes d'analyse paramétrique des chaussées fissurées. La chaussée est choisie équivalente à trois couches élastiques et homogènes représentant à la fois une couche de surface et des couches de bases reposant sur un sol. D'une manière similaire à celle du modèle de Pasternak pour les chaussées béton, le sol est modélisé au moyen d'une couche dite "de cisaillement" ajoutée à un massif de ressorts élastiques (massif de Winkler), afin d'assurer le transfert des contraintes de cisaillement entre la chaussée et les ressorts. Le quadri-couche total (3 couches de chaussée plus 1 couche "de cisaillement") est modélisé à l'aide du modèle multiparticulaire des matériaux multicouches (M4) à 5n (n : nombre de couches, ici n=4) équations d'équilibre (ici 20), le M4-5n, présenté dans le chapitre précédent. Le système de douze équations différentielles d'ordre 2 résultant, écrit complètement analytiquement, est résolu suite aux travaux précédents, par différences finies (Newmark) dans ce cas 2D déformations planes. La résolution générale de ce système d'équations ainsi que le calcul et l'écriture simplifiée des matrices résultantes sont détaillées respectivement dans les annexes A et B. Dans ce chapitre, après avoir présenté la modélisation choisie pour le sol, nous synthétisons les équations du modèle retenu puis illustrons son intérêt sur un cas de chaussée composite mixte fissurée.

3.1 Modélisation du sol

Pour examiner le problème complet d'une chaussée, il faut ajouter le sol en dessous de cette dernière. Afin de simplifier la résolution numérique proposée dans la thèse de (Tran, 2004) qui utilise un massif

de Boussinesq pour modéliser le sol, un massif de Winkler avec une couche de M4-5n dite "couche de cisaillement" (Figure 3.1) est choisi. Dans la partie bibliographique, nous avons vu que le massif de Winkler permet de modéliser le sol (Westergaard, 1926) par un ensemble de ressort assimilable à un liquide dense. Nous avons vu également que la modélisation du sol par un massif de ressorts (massif de Winkler) bien que très simple à utiliser et rapide rend nul les efforts de cisaillement entre le sol et la structure, car les ressorts se déforment indépendamment les uns des autres, alors qu'en réalité ils ne le sont pas (Berthemet, 2012), (Berthemet and Chabot, 2013). Ainsi, la déflexion en un point donné ne dépend que de la contrainte en ce même point et il n'y a pas d'effet exercé par la fondation environnante.

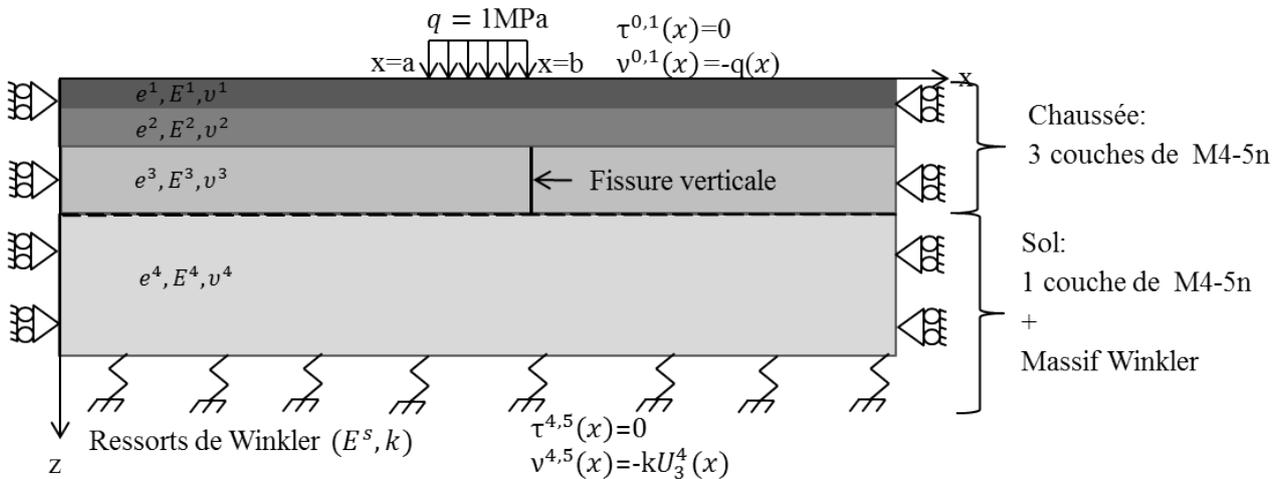


FIGURE 3.1 – Schéma de modélisation simplifiée de la structure de chaussée 2D par le M4-5nW (Nasser and Chabot, 2015a), (Nasser and Chabot, 2015b), (Nasser and Chabot, 2016)

Pour améliorer cette modélisation et ainsi avoir de meilleures approximations des champs mécaniques près du sol tout en gardant cette simplicité de modélisation, l'idée, dans ce travail, est d'ajouter ainsi pour la modélisation complète du sol une couche de M4-5n au massif de ressorts assurant ainsi le transfert des contraintes de cisaillements de la chaussée au massif de Winkler. Comme pour Pasternak (Pasternak, 1954), cette couche est nommée "couche de cisaillement" chargée d'assurer le transfert des efforts d'interface e cisaillement entre les ressorts et le multicouche.

En 2D, on considère ainsi la variable x comme étant la coordonnée longitudinale de la charge et z l'axe d'empilement des 4 couches de haut en bas (Figure 3.1). On rappelle que sous l'hypothèse de déformations planes choisie, le problème est filaire et ne dépend que de la variable x .

La Figure 1.8 dans le premier chapitre illustre la différence de comportement d'une plaque reposant sur un sol réel et d'une plaque dont la fondation est modélisée par un massif de Winkler sous une charge répartie $q(x)$. De ce fait, la réaction verticale de la fondation $q(x)$ en tout point de contact x entre cette couche et le massif s'écrit en fonction de son déplacement vertical $U_3(x)$ à sa surface :

$$q(x) = kU_3(x) \quad (3.1)$$

La raideur, k , des ressorts s'extrapole à 4 couches (3 pour la chaussée et 1 pour le sol de modules E^i , $i \in \{1, 4\}$) selon la formule d'Odemark (Eq. 3.2)(Odemark, 1949) où h^* , épaisseur équivalente du multicouche, est calculée à partir de la "Méthode d'épaisseur équivalente" (MET) donnée par Odemark (Eq. 3.2). f est un facteur de correction qui est égal à 0.8 pour un multicouche et E^s est le module d'Young du sol.

$$k = \frac{E^s}{h^*} \quad \text{avec} \quad h^* = \sum_{i=1}^{i=4} f e^i \sqrt[3]{\frac{E^i}{E^s}} \quad (3.2)$$

(Marchand et al., 1983) ont constaté que cette formule peut être utilisée seulement si l'épaisseur des couches, e^i , est supérieure à la moitié du rayon de la charge ou si le rapport $\frac{E^i}{E^{i+1}}$ est supérieur à 2. Le grand avantage de ce modèle est le fait qu'il puisse mener à des solutions analytiques simples. L'équation d'interface chaussée/sol reliant les champs de déplacements du M4-5n aux contraintes d'arrachement et de cisaillement peut s'écrire alors de la manière suivante (Eq. 3.3) :

$$\mathbb{D}X(x) = \mathbb{E}Y^{4,5}(x) \quad (3.3)$$

Avec $X(x)$, le vecteur des inconnues cinématiques et $Y^{4,5}(x)$, le vecteur des inconnues d'interface sol-chaussée comme donné dans l'Eq. 3.4 :

$$X = \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{bmatrix}_{12 \times 1} \quad [X^i] = \begin{bmatrix} U_1^i \\ \phi_1^i \\ U_3^i \end{bmatrix} \quad [Y^{4,5}] = \begin{bmatrix} \tau_1^{4,5} \\ \nu^{4,5} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad (3.4)$$

L'hypothèse de continuité des déplacements verticaux entre le multicouche ($n=4$) et le massif de Winkler (indexé 5), implique ainsi les conditions aux limites liant les efforts d'interface et les ressorts (Eq. 3.5).

$$\begin{cases} \tau_1^{4,5}(x) = 0 \\ \nu^{4,5}(x) = -kU_3^4(x) \end{cases} \quad (3.5)$$

Nous pouvons alors déduire les matrices \mathbb{D} et \mathbb{E} pour un quadricouche modélisé alors par le M4-5n :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1(x) \\ \phi_1^1(x) \\ U_3^1(x) \\ \vdots \\ U_1^4(x) \\ \phi_1^4(x) \\ U_3^4(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_1^{4,5}(x) \\ \nu^{4,5}(x) \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Dans la mise au point de l'outil de modélisation simplifié, l'épaisseur e^4 de la "couche de cisaillement" équivalente doit être déterminée. Celle-ci est définie, pour une structure de chaussée donnée, par deux

règles. La première est de respecter la limite de validité géométrique de couche mince d'un modèle de plaque ($e^4 \ll L$). L'épaisseur de la couche de cisaillement (e^4) est supposée ne pas être supérieure à dix fois la longueur de la structure étudiée ($e^4 \leq \frac{L}{10}$). Deuxièmement, un rapport entre deux couches consécutives de M4-5n dans leur ordre d'empilement doit être inférieur à 4 ($\frac{e^4}{e^3} \leq 4$) pour que les résultats de calcul soient suffisamment précis dans la discrétisation M4 des champs selon les épaisseurs des couches considérées (Tran, 2001).

3.2 Résolution numérique du M4-5n par la méthode aux Différences Finies (DF)

En manipulant les différentes équations d'équilibre (Eq.s 2.35 à 2.37), de comportement (Eq.s 2.38 à 2.42) et de compatibilité (Eq.s 2.25 à 2.29), le problème à résoudre en 2D déformation plane s'écrit sous la forme d'un système de 12 (3n) équations différentielles d'ordre 2 pour les 4 couches modélisées par le M4-5n (Eq. 3.7).

$$AX''(x) + BX'(x) + CX(x) = DY^{0,1'}(x) + EY^{4,5'}(x) + FY^{0,1}(x) + GY^{4,5}(x) \quad (3.7)$$

On suppose ici que les forces de volume sont nulles et on ne considère pas de déformations anélastiques. On note par « ' » les dérivées premières des champs inconnus et par « '' » les dérivées secondes des champs par rapport à cette variable, x. Rappelons que X(x) représente le vecteur contenant les 3n inconnues cinématiques moyens par couche i de Reissner-Mindlin, notés $U_1^i(x)$, $\phi_1^i(x)$ et $U_3^i(x)$. Ces champs cinématiques, inconnus du problème à résoudre, définissent respectivement : les déplacements moyens dans le plan de la couche i ; leur rotation moyenne ; et les déplacements verticaux moyens pour chaque couche i du problème ($i \in \{1, n\}$). $Y^{0,1}(x)$ et $Y^{4,5}(x)$ sont les vecteurs d'efforts d'interface entre la structure multicouche et son environnement extérieur permettant l'écriture des conditions aux limites de chargement des véhicules s'exerçant au-dessus (exposant "0,1" entre l'extérieur et la première couche) et au-dessous (exposant "n,n+1", entre la dernière couche et l'extérieur) de la liaison avec la chaussée.

$$X = \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{bmatrix}_{12 \times 1} \quad [X^i] = \begin{bmatrix} U_1^i \\ \phi_1^i \\ U_3^i \end{bmatrix} \quad [Y^{0,1}] = \begin{bmatrix} \tau_1^{0,1} \\ \nu^{0,1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad [Y^{4,5}] = \begin{bmatrix} \tau_1^{4,5} \\ \nu^{4,5} \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad (3.8)$$

Les matrices $[A]_{12 \times 12}$, $[B]_{12 \times 12}$, $[C]_{12 \times 12}$, $[D]_{12 \times 2}$, $[E]_{12 \times 2}$, $[F]_{12 \times 2}$ et $[G]_{12 \times 2}$ dépendent des paramètres géométriques et mécaniques des matériaux du problème élastique équivalent. Contrairement aux travaux de (Tran, 2004) et pour éviter in fine les multiples erreurs d'accumulation dans le calcul numérique, ces matrices sont complètement écrites sous forme explicite dans l'annexe B. Afin de développer et de vérifier les calculs analytiques, le logiciel Mathematica (version 5.0) est utilisé (<http://www.wolfram.com>). L'utilisation de ce logiciel de calcul permet ainsi d'écrire ces matrices analytiquement d'une manière simplifiée et réduire de plus le nombre d'opérations que l'outil

numérique doit faire.

Les systèmes de conditions limites aux bords du quadricouche sont exprimés en fonction des inconnues cinématiques de couches et des efforts d'interfaces utilisant les équations de comportement de couche comme donné dans le chapitre précédent (Eq.s 2.54, 2.55, 2.56, 2.57, 2.58, 2.59). L'introduction de fissures verticales suivant l'épaisseur d'une ou de plusieurs couches à un x donné nécessite à considérer que les lèvres de la fissure sont deux bords libres distants de la largeur de la fissure. L'introduction de décollements partiels à l'interface entre les couches i et $i+1$ est également possible à l'aide des vecteurs $Y^{i,i+1}(x)$ donnés dans l'annexe A.

La forme matricielle des conditions limites devient :

$$Cx_1X'(x) + Cx_2X(x) = Cx_3Y^{0,1}(x) + Cx_4Y^{4,5}(x) \quad (3.9)$$

Les tenseurs $[Cx_1]_{12 \times 12}$, $[Cx_2]_{12 \times 12}$, $[Cx_3]_{12 \times 2}$ et $[Cx_4]_{12 \times 2}$ sont écrits sous forme explicite dans l'annexe B.

Pour la chaussée considérée, dans l'exemple illustré par la suite et ainsi modélisée en 2D, le quadricouche est considéré bloqué aux bords, loin de la charge où les matériaux sont confinés (Eq. 2.56). Les conditions limites des bords libres (Eq. 2.58) sont appliquées pour représenter une fissure verticale dans la troisième couche ($i=3$) (Figure 3.1).

L'expression analytique de l'énergie élastique du M4-5n $W_{2D}^{5n}(x)$ s'écrit, après plusieurs simplifications, en terme des caractéristiques des matériaux et du champ cinématique par couche i et des efforts d'interface, inconnus du problème (Eq. 3.10). Sa valeur est ainsi obtenue dès résolution des vecteurs inconnus considérés.

$$\begin{aligned} W_{2D}^{5n}(x) = & \sum_{i=1}^4 \left[\frac{e^{i5} E^i (1 + \nu^i)}{120(1 - \nu^{i2})^2} \int_0^L \phi_{1,11}^{i2}(x) dx + \frac{7e^{i3}}{60(1 - \nu^i)} \int_0^L \phi_{1,11}^i(x) (\tau_1^{i-1,i}(x) - \tau_1^{i,i+1}(x)) dx \right. \\ & + \frac{e^i E^i}{2(1 - \nu^{i2})} \int_0^L U_{1,1}^{i2}(x) dx + \frac{e^{i3} E^i}{24(1 - \nu^{i2})} \int_0^L \phi_{1,1}^{i2}(x) dx \\ & + \frac{9e^i (1 + \nu^i)}{15E^i} \int_0^L (\tau_1^{i-1,i}(x) - \tau_1^{i,i+1}(x))^2 dx + \frac{17e^i}{280E^i} \int_0^L (\nu^{i,i+1}(x) - \nu^{i-1,i}(x))^2 dx \\ & \left. + \frac{e^i}{8E^i} \int_0^L (\nu^{i,i+1}(x) + \nu^{i-1,i}(x))^2 dx \right] \quad (3.10) \end{aligned}$$

De même que pour les travaux précédents, la résolution numérique du système 3.7, utilisant la méthode des différences finies, consiste tout d'abord à adimensionnaliser les différentes variables par rapport aux efforts et longueurs du problème, afin d'éviter les problèmes de mauvais conditionnement numérique des différentes matrices (Tran, 2004) (Annexe A). Ensuite, le milieu multicouche étudié est discrétisé selon x en N points (nœuds) (Figure 3.2).

3.2. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DU M4-5N PAR LA MÉTHODE AUX DIFFÉRENCES FINIES (DF)

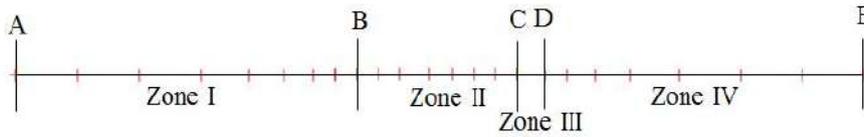


FIGURE 3.2 – Discrétisation pour le M4-5n et découpage en zone d’une structure de chaussée 2D fissurée (Nasser and Chabot, 2015b), (Nasser and Chabot, 2016)

La méthode de Newmark (Newmark, 1959), utilisée pour réduire l’ordre des équations différentielles, est implémenté dans le logiciel source libre pour les calculs numérique ”Scilab” (Bürkli, 2010), (Berthemet, 2012) (<http://www.scilab.org>) . Dans chaque couche ainsi modélisée, il est possible d’introduire aisément une fissure verticale suivant l’épaisseur de la couche. Entre deux nœuds consécutifs, les lignes et les colonnes de la couche concernée sont remplacées par celles correspondant aux conditions aux limites des bords libres. Les matrices correspondantes dans le cas où une fissure verticale est introduite dans la troisième couche (Figure 3.1) sont présentés dans l’annexe B.

Après plusieurs manipulations des équations du M4-5n, il est possible de réduire l’ordre du système différentiel (Eq.3.7) pour obtenir le système final donné dans l’Eq. 3.11 :

$$\mathbb{A}\mathbb{X}(N) = \mathbb{B}\mathbb{Y}^{0,1}(N) + \mathbb{C}\mathbb{Y}^{4,5}(N) \quad (3.11)$$

Lorsque la variable x est discrétisée en N nœuds, la matrice \mathbb{A} est de dimension $12N \times 12N$. Les deux tenseurs \mathbb{B} et \mathbb{C} , de dimension $12N \times 2N$, représentent les tenseurs résultants des forces de chargements et autres conditions aux limites s’exerçant respectivement au-dessus et au-dessous du multicouche par l’intermédiaire des vecteurs $\mathbb{Y}^{0,1}(N)$ et $\mathbb{Y}^{4,5}(N)$. La solution est obtenue en calculant le vecteur $\mathbb{X}(N)$ des 12 champs cinématiques.

Quel que soit le cas de position de charge selon x par rapport à la position d’une fissure verticale, pour le multicouche ainsi modélisé par le M4-5n, on choisit de diviser le milieu filaire en quatre zones suivantes (Figure 3.2) :

- * La zone I, à N_I nœuds, est située à gauche de la charge avec un maillage de préférence dégressif (décroissant) de gauche à droite
- * La zone II, à N_{II} nœuds, contient la zone de chargement, sa discrétisation est régulière
- * La zone III, à 2 nœuds seulement, correspond à la zone de la fissure (conditions limites M4-5n de bords libres entre deux nœuds consécutifs)
- * La zone IV, à N_{IV} nœuds, est localisée à droite de la charge avec un maillage de préférence progressif (croissant), de gauche à droite

Afin de déterminer le nombre de nœuds de chaque zone, un test de convergence des champs mécaniques est réalisé comme donné dans l’exemple traité par la suite.

3.3 Application de l'outil 2D finalisé sur la modélisation d'une chaussée composite mixte

Afin d'illustrer l'intérêt d'un tel outil servant de référence dans les développements numériques du chapitre suivant, nous choisissons de l'appliquer sur l'étude d'une chaussée composite mixte. La chaussée composite classique choisie est donnée par le catalogue français des chaussées (SETRA-LCPC, 1998). Ce type de structure est construit et utilisé pour des voies du réseau non structurant soumises à un trafic lourd de type *TC7* (compris entre 17,5 et 43,5 millions de Poids lourds sur la durée de vie de la chaussée). Cette chaussée repose sur un sol de type *PF3* (plateforme support avec un module de $E^s = 120MPa$). Elle est donc réduite à trois couches homogènes et élastiques dont on connaît les propriétés mécaniques et géométriques. La première couche, appelée couche de surface, est constituée de 0.08m de béton bitumineux semi-grenu (BBSG, $E^1 = 5400MPa$ équivalent à 15C et 10Hz, $\nu^1 = 0.35$). La deuxième couche, nommée couche de base, est formée de 0.15m de grave-bitume de classe 3 (*GB3*, $E^2 = 9300MPa$, $\nu^2 = 0.35$). La troisième couche, dite couche de fondation, est composée de 0.23m de grave-ciment de classe 3 (*GC3*, $E^3 = 23000MPa$, $\nu^3 = 0.25$). A terme, par retrait du matériau, cette troisième couche est supposée fissurée verticalement le long de son épaisseur.

Comme vu précédemment, de même que dans la modélisation de la Pasternak pour les chaussées en béton, le sol est supposé équivalent à la combinaison d'une couche fictive nommée "couche de cisaillement" assurant le transfert des contraintes de cisaillements de la chaussée par sa couche de fondation au massif de ressorts (massif de Winkler) (Westergaard, 1926). On suppose que la couche de cisaillement a un module d'Young égal à celui des ressorts ($E^4 = E^s = 120MPa$, $\nu^4 = \nu^s = 0.35$). La raideur des ressorts k est ainsi calculée d'après l'Eq. 3.2.

Pour choisir l'épaisseur de la couche de cisaillement e^4 et les dimensions finies de la structure selon x à partir desquelles la charge n'exerce plus d'effort, une étude paramétrique est réalisée sur l'exemple de chaussée non fissurée. L'ensemble du système à quatre couches est modélisé en utilisant le modèle multiparticulaire des matériaux multicouches (M4-5n). On suppose ici que chaque couche de M4-5n possède la "vraie" épaisseur de la chaussée.

Dans le cas 2D déformations planes, une charge unitaire de 1MPa est choisie arbitrairement uniforme et répartie sur une largeur de 0.15m. La Figure 3.1 représente le schéma du modèle retenu, nommé "M4-5nW". Les conditions limites appliquées aux bords latéraux de la structure correspondent à son confinement par des hypothèses de bords bloqués, les déplacements horizontaux $U_1^i(x)$, les rotations $\phi_1^i(x)$ et les efforts tranchants $Q_1^i(x)$ sont nuls $\forall i \in \{1, 4\}$ (Eq. 2.56).

Nous avons vu que Scilab, logiciel libre de calcul numérique multiplateforme, est utilisé pour programmer la résolution du modèle ainsi nommé "cas de référence" : le M4-5nW. La programmation effectuée par (Berthemet, 2012) est améliorée afin d'ajouter ainsi la couche de cisaillement du sol. Les matrices de la résolution du système d'équations pour 4 couches (Eq. 3.7) ainsi que les matrices qui correspondent aux conditions limites, écrites sous forme simplifiée (Annexe B), sont alors introduites. Afin

de garder la précision des résultats, surtout aux bords de la chaussée et de la fissure, tout en réduisant le nombre de nœuds utilisé dans le but de réduire le temps de calcul, le maillage progressif et dégressif par zone est programmé (Annexe B) et introduit dans l'outil développé. La possibilité d'introduire la fissure verticale dans n'importe quelle couche du quadricouche est également développée dans l'outil et l'interface utilisateur.

3.3.1 Détermination de la longueur du quadricouche retenu

Pour déterminer la longueur du quadricouche retenu, une étude paramétrique sur un quadricouche non fissuré est réalisée grâce à l'outil M4-5nW développé dans Scilab. Tout d'abord, le M4-5nW est validé en comparant les résultats avec ceux obtenus par la méthode des Éléments Finis (EF) donnés par le code César-LCPC cléo 2D (<http://www.itech-soft.com/cesar/>).

Pour l'exemple modélisé à l'aide de César-LCPC, la couche de cisaillement et les ressorts de Winkler introduits dans le calcul M4-5n sont remplacés par une couche de 6m d'épaisseur bloquée en déplacement à sa base. Celle-ci est admise usuellement en chaussée suffisante pour représenter le sol par EF (LPC, 1997). Le maillage 2D EF est réalisé avec des éléments quadrangles de degré 2 (Q8).

Pour le M4-5nW et dans le cas de cet exemple non fissurée, la Zone III n'existe pas (Figure 3.2). L'épaisseur de la quatrième couche est choisie arbitrairement à $4e^3$. Pour les deux outils de calculs utilisés, il n'y a pas d'optimisation de maillage dans ce paragraphe et on les considère réguliers avec des mailles de largeur de 0.001m selon l'axe des x.

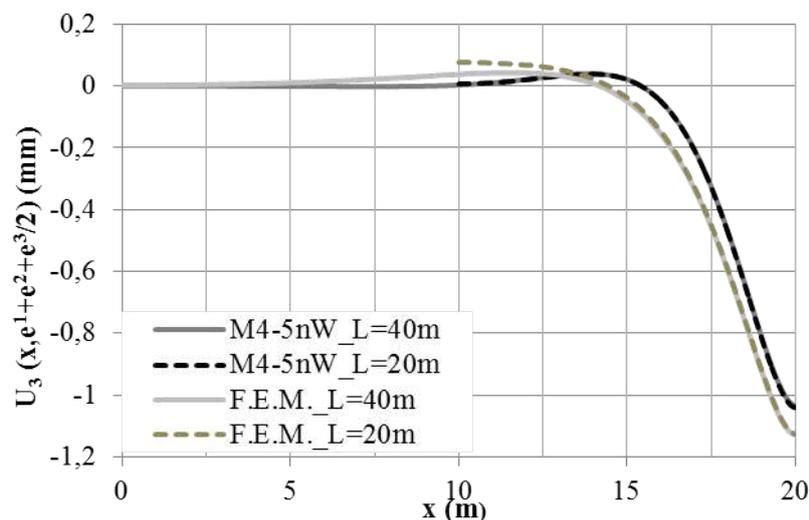


FIGURE 3.3 – Comparaison du déplacement vertical moyen de la couche 3 pour les différents modèles étudiés (Nasser and Chabot, 2015a), (Nasser and Chabot, 2015b), (Nasser and Chabot, 2016)

Par symétrie, la moitié gauche du quadricouche est représentée dans toutes les figures de ce chapitre. Ainsi après différentes simulations, une demie longueur de structure de 10m pour le calcul M4-5n

3.3. APPLICATION DE L'OUTIL 2D FINALISÉ SUR LA MODÉLISATION D'UNE CHAUSSÉE COMPOSITE MIXTE

semble nécessaire pour s'assurer que la déflexion maximale $U_3(x, z = e^1 + e^2 + e^3/2)$ sous la charge positionnée entre $x=9.925\text{m}$ et $x=10.075\text{m}$ converge (axe de z vers le haut) et que les déplacements verticaux aux bords de la chaussée deviennent nuls.

Dans le cas de la modélisation EF, contrairement au M4-5nW, une demie longueur de 20m assure des déplacements nuls aux bords de la chaussée, bien que la déflexion maximale sous la charge converge pour une demie longueur de 10m. Nous avons considéré ainsi par la suite qu'une chaussée de 10m de demie longueur suffit pour faire la comparaison entre les modèles et valider les résultats obtenus par simulation M4-5nW. L'épaisseur e^4 de la couche de cisaillement est à déterminer et fait l'objet du paragraphe suivant.

3.3.2 Détermination de l'épaisseur de la couche de cisaillement

Dans le cas de la chaussée composite, de demie longueur de 10m ainsi simulée, les conditions à respecter pour que le modèle M4-5nW (cf. §3.1) indiquent ainsi une épaisseur maximale de la couche de cisaillement de 0,92 m ($e_{max}^4 = 4e^3$). L'influence de cette épaisseur sur le comportement de la structure est réalisée pour quatre valeurs différentes ($e^4 = e^3, 2e^3, 3e^3$ et $4e^3$) et sur quatre champs : les déplacements moyens horizontaux ($U_1^i(x)$) et verticaux ($U_3^i(x)$) de chaque couche i et les contraintes de cisaillement ($\tau_1^{i,i+1}(x) = \sigma_{xz}(x, \sum_{i=1}^i e^i)$) et d'arrachement ($\nu^{i,i+1}(x) = \sigma_{zz}(x, \sum_{i=1}^i e^i)$) à l'interface $i, i+1$. A titre d'exemple, pour la chaussée composite non fissurée, les Figures 3.4 et 3.5 illustrent respectivement les déplacement horizontal $U_1^1(x)(= U_1(x, 0))$ et verticaux $U_3^1(x)(= U_3(x, 0))$ dans la première couche en haut de la chaussée. Les Figures 3.6 à 3.11 illustrent respectivement les contraintes de cisaillement et d'arrachement des interfaces 1,2 ; 2,3 et 3,4 pour différentes valeurs de e^4 . Ces valeurs sont comparées aux résultats obtenus par EF. Pour les deux simulations, les maillages sont choisis réguliers comme dans le cas précédent.

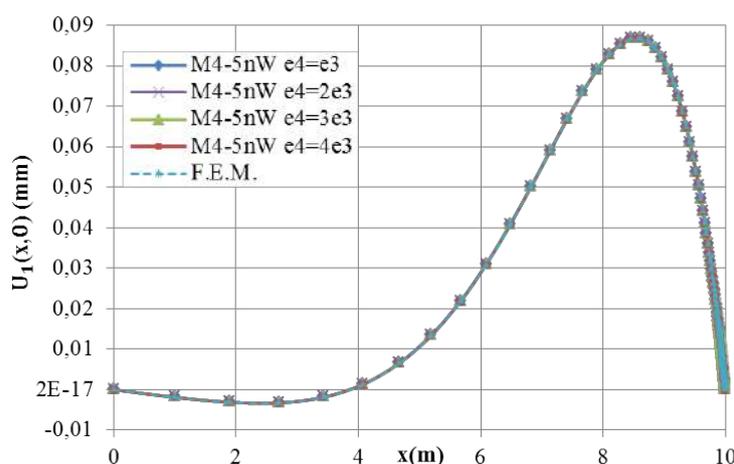


FIGURE 3.4 – Comparaison du déplacement horizontal en haut de la chaussée ($z=0$) pour différentes épaisseurs e^4 du M4-5n avec celle obtenue par EF

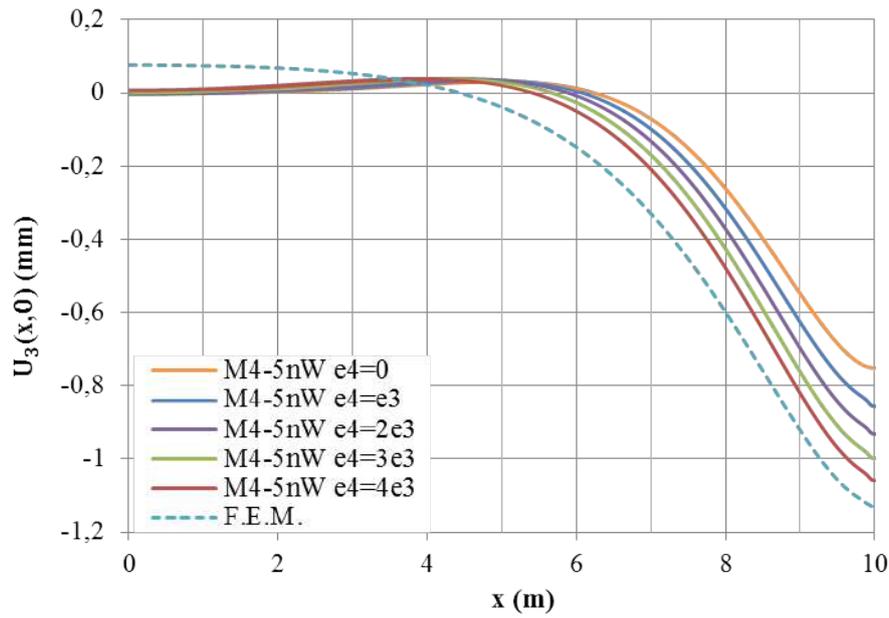


FIGURE 3.5 – Comparaison du déplacement vertical en haut de la chaussée ($z=0$) pour différentes épaisseurs e^4 du M4-5n avec celle obtenue par EF (Nasser and Chabot, 2015a), (Nasser and Chabot, 2016)

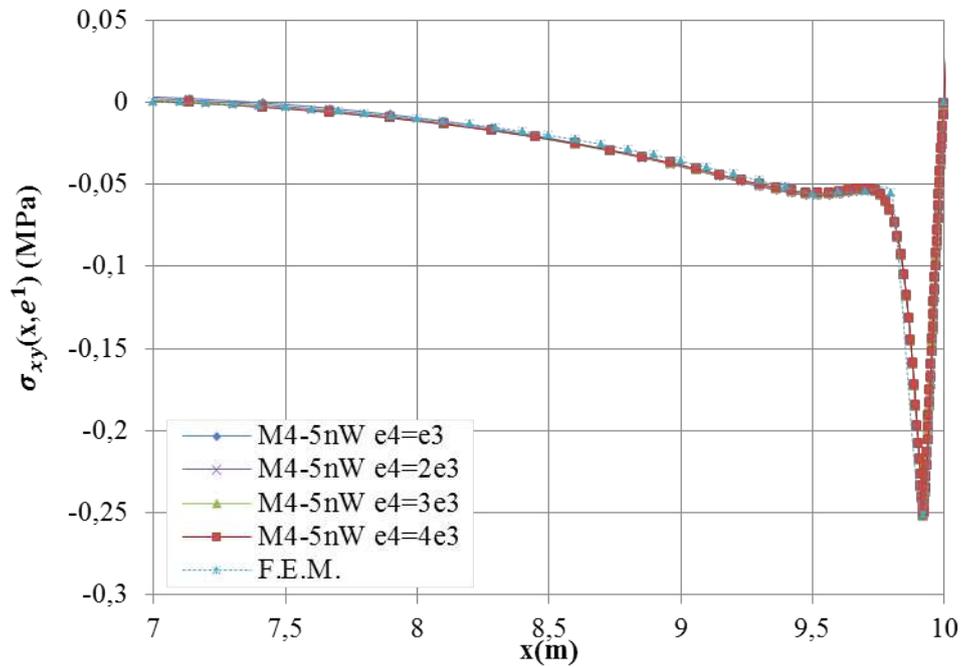


FIGURE 3.6 – Comparaison des contraintes de cisaillement d'interface 1,2 ($z=e^1$) pour différentes épaisseurs e^4 du M4-5n avec celle obtenue par EF à partir des éléments du dessous de l'interface

3.3. APPLICATION DE L'OUTIL 2D FINALISÉ SUR LA MODÉLISATION D'UNE CHAUSSEE COMPOSITE MIXTE

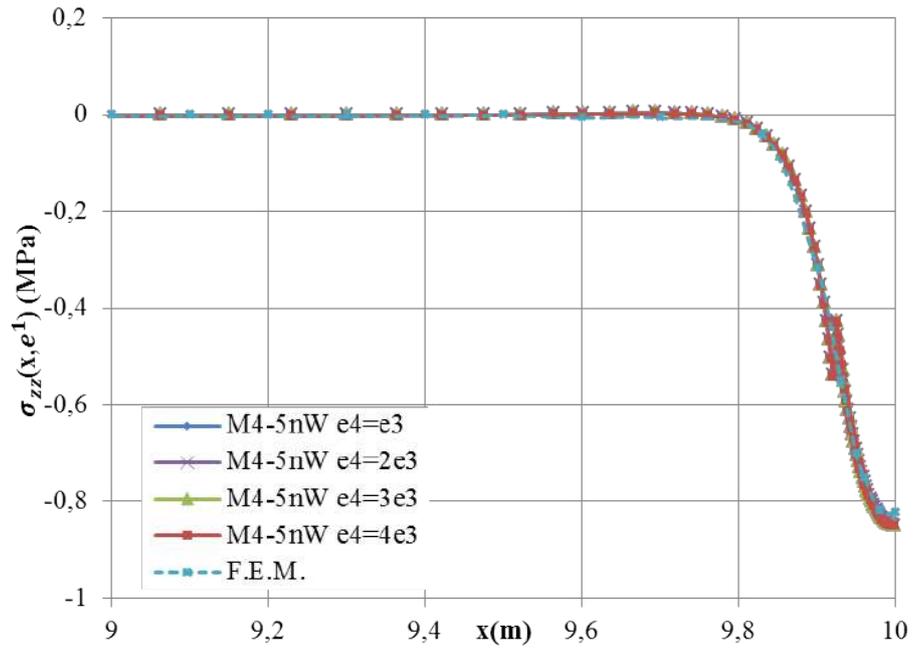


FIGURE 3.7 – Comparaison des contraintes d'arrachement d'interface 1,2 ($z=e^1$) pour différentes épaisseurs e^4 du M4-5n avec celle obtenue par EF obtenue par EF à partir des éléments du dessous de l'interface

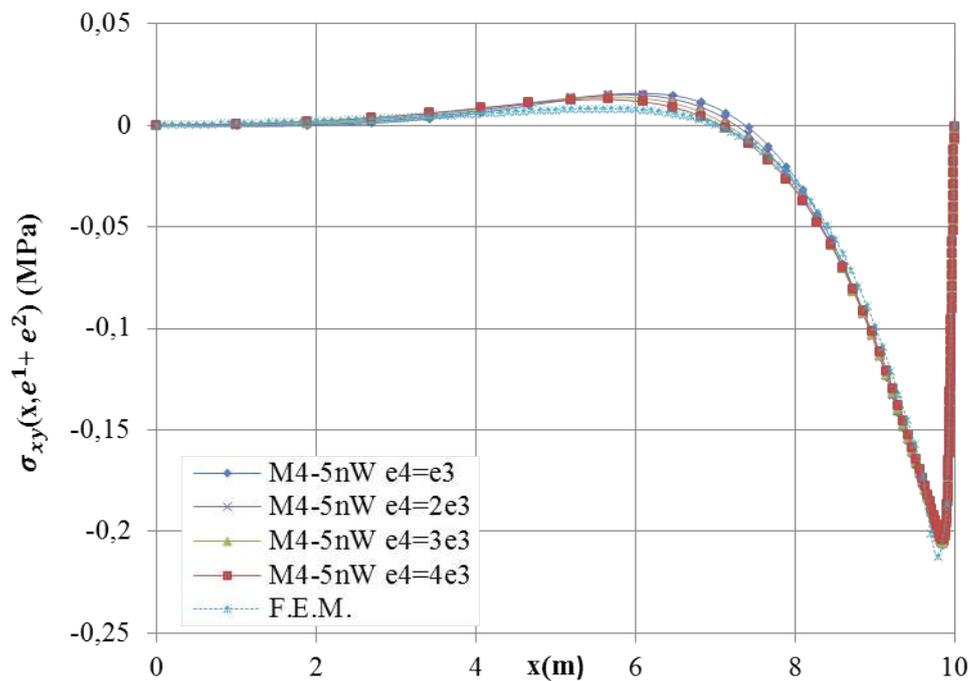


FIGURE 3.8 – Comparaison des contraintes de cisaillement d'interface 2,3 ($z=e^1 + e^2$) pour différentes épaisseurs e^4 du M4-5n avec celle obtenue par EF à partir des éléments du dessous de l'interface

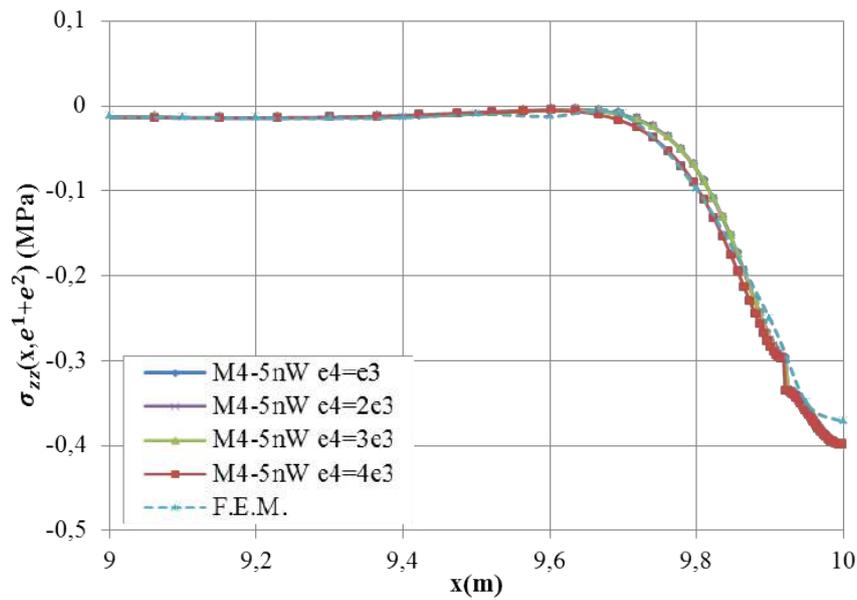


FIGURE 3.9 – Comparaison des contraintes d'arrachement d'interface 2,3 ($z=e^1 + e^2$) pour différentes épaisseurs e^4 du M4-5n avec celle obtenue par EF obtenue par EF à partir des éléments du dessous de l'interface

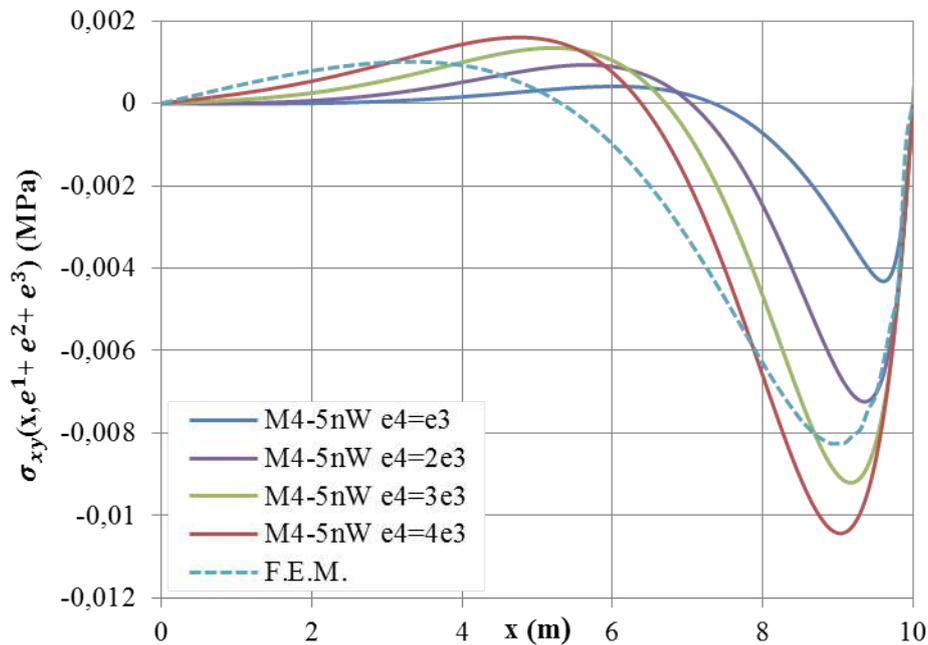


FIGURE 3.10 – Comparaison des contraintes de cisaillement d'interface 3,4 ($z=e^1 + e^2 + e^3$) pour différentes épaisseurs e^4 du M4-5n avec celle obtenue par EF à partir des éléments du dessous de l'interface (Nasser and Chabot, 2015a)

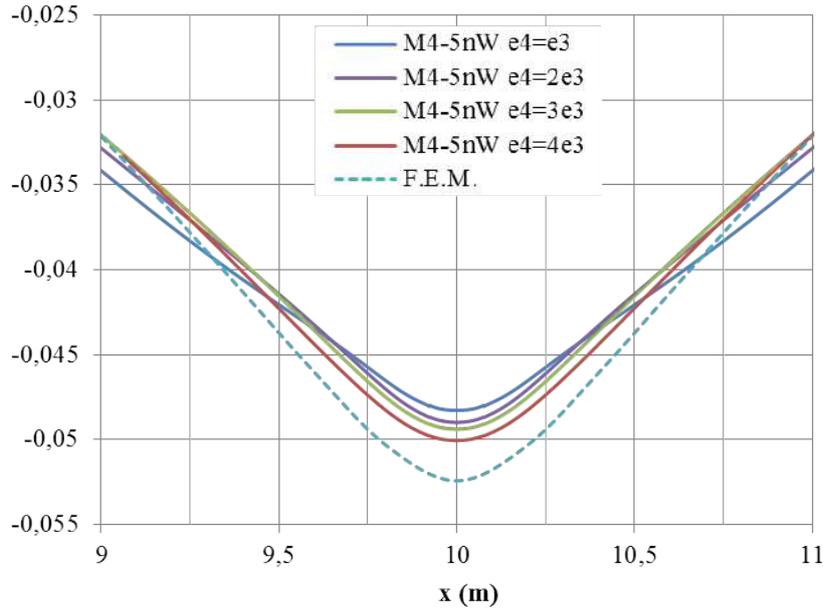


FIGURE 3.11 – Comparaison des contraintes d’arrachement d’interface 3,4 ($z=e^1 + e^2 + e^3$) pour différentes épaisseurs e^4 du M4-5nW avec celle obtenue par EF obtenue par EF à partir des éléments du dessous de l’interface (Nasser and Chabot, 2015b)

L’étude de l’influence des valeurs de e^4 sur les champs du M4-5nW comparées à ceux obtenus par EF pour le cas d’une chaussée composite non fissurée de demie longueur 10m conduit aux conclusions suivantes :

- L’épaisseur e^4 de la couche de cisaillement n’a pas d’influence sur les déplacements horizontaux ($U_1^i(x)$) de toutes les couches ni sur les efforts de cisaillement et d’arrachement pour les deux premières interfaces ($\tau_1^{1,2}(x), \tau_1^{2,3}(x), \nu^{1,2}(x), \nu^{2,3}(x)$) (Figures 3.4, 3.6, 3.7, 3.8 et 3.9).
- Cette épaisseur affecte le déplacement vertical de toutes les couches ($U_3^i(x)$) et seulement les efforts de la troisième interface, entre la chaussée et la couche de cisaillement du sol. Les valeurs de $U_3^i(x), \tau_1^{3,4}(x)$ et de $\nu^{3,4}(x)$ augmentent avec l’augmentation de l’épaisseur e^4 (Figures 3.5, 3.10 et 3.11). Cependant, pour les cisaillements d’interface du M4-5nW, l’aire sous la courbe donne bien une valeur égale à celle obtenue dans le calcul EF avec une épaisseur $e^4 = 4e^3$ (Nasser and Chabot, 2015a), (Nasser and Chabot, 2015b), (Nasser and Chabot, 2016).

Par la suite, dans le cas de la chaussée composite étudiée (Figure 3.1), nous fixons l’épaisseur de la couche de cisaillement e^4 à $0.92m$ ($e_{max}^4 = 4e^3 = 0.92m$). La raideur des ressorts, k , est alors égale à $k = 47.3MPa/m$

3.4 Application au cas d’une chaussée mixte fissurée

Dans le cas de chaussée mixte fissurée, on considère que la troisième couche de la chaussée, dû au retrait du matériau traité aux liants hydrauliques, génère une fissure verticale qui : soit remonte dans

la 2ème couche (phénomène de "reflective cracking"); soit contribue à un décollement de l'interface entre les couches 2 et 3 (Figure 1.6). Pour étudier ce cas, une fissure verticale sur toute l'épaisseur de la couche 3, de 0.001m de largeur est introduite. Par la suite, on suppose que la charge est positionnée à gauche de la fissure. Dans ce cas, afin d'obtenir des intensités de contraintes d'interface M4-5n précises sous la charge, au bord de la fissure et optimiser les temps de calcul, un maillage irrégulier par zone est choisi sur les zones I et IV (Figure 3.2). In fine, ce sont ces champs d'interface que l'on étudie pour comprendre les mécanismes de rupture d'interface de la structure ainsi fissurée initialement.

3.4.1 Validation par rapport aux éléments finis

Dans le cas d'une charge située au centre de la chaussée et sur le bord gauche d'une fissure verticale (positionnée entre les points $x=b=10.075\text{m}$ et $x=10.076\text{m}$) (Figure 3.1), une étude paramétrique de l'influence du maillage sur la convergence des intensités des contraintes de cisaillement et d'arrachement d'interface M4-5nW est faite (entre les couches 2 et 3). Pour réaliser cette étude, nous considérons d'abord que la longueur de la maille dans la zone II sous la charge est égale à la longueur de la première maille dans la zone IV, juste après la fissure (Figure 3.2). Selon la formule utilisée pour déterminer la distribution des mailles dans les différentes zones, on peut déterminer le nombre de nœuds dans la zone II et IV (cf. détails dans l'annexe B). Après, le nombre de nœuds dans la zone I est ajustée afin d'obtenir la longueur de la dernière maille égale à celles de la zone II. Pour introduire la fissure, on suppose que la zone III ne contient que 2 nœuds. Par exemple, les Figures 3.12 et 3.13 montrent respectivement la convergence de l'intensité de la contrainte d'arrachement le long de l'interface 2,3 ($\nu^{2,3}(x)$) au bord de la lèvres gauche pour $x = b = 10.075\text{m}$ et droite pour $x = 10.076$ de la fissure, en fonction du nombre de nœuds dans la zone II et IV.

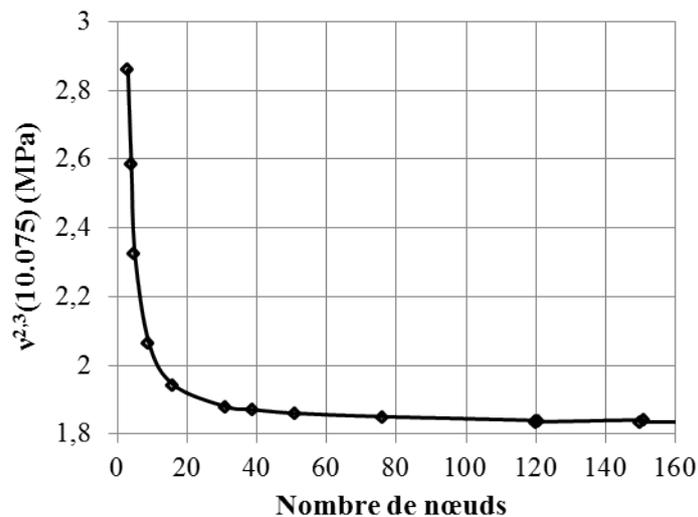


FIGURE 3.12 – Convergence des efforts normales d'interface entre les couches 2 et 3 au bord gauche de la fissure ($x=10.075\text{m}$)(Nasser and Chabot, 2016)

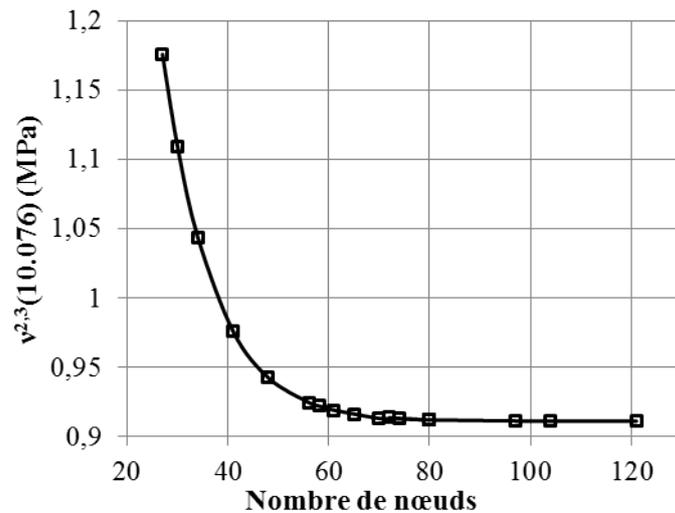


FIGURE 3.13 – Convergence des efforts normaux d'interface entre les couches 2 et 3 au bord droit de la fissure ($x=10.076m$)(Nasser and Chabot, 2016)

Différentes valeurs sont ainsi testées et il est constaté que 74 nœuds dans la zone I, 121 nœuds dans la zone II (sous la charge) et 70 nœuds dans la zone IV sont suffisantes pour obtenir des intensités finies avec une précision de 10^{-2} MPa à gauche et à droite des lèvres de la fissure. La longueur de la maille est alors 0.00125mm. Avec ces valeurs retenues, les Figures 3.14 et 3.15, illustrent respectivement la comparaison des contraintes de cisaillement et d'arrachement à l'interface entre les couches 3 et 4 du M4-5nW par rapport aux simulations faites par EF sous cléo 2D.

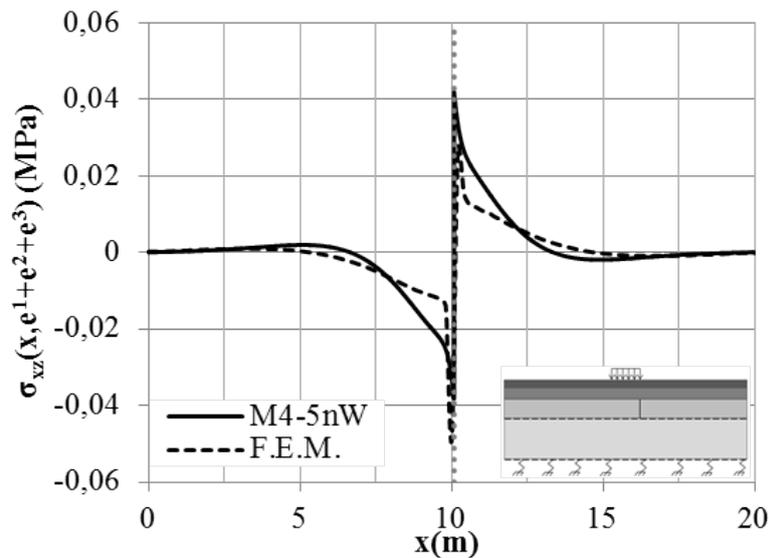


FIGURE 3.14 – Comparaison entre modèles des contraintes de cisaillement à l'interface entre les couches 2 et 3 (Nasser and Chabot, 2015a)

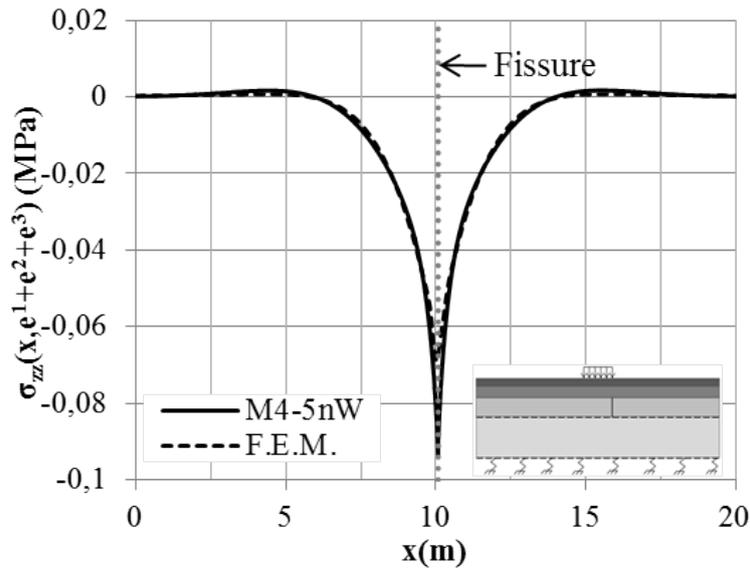


FIGURE 3.15 – Comparaison entre modèles des contraintes d’arrachement à l’interface entre les couches 2 et 3 (Nasser and Chabot, 2015a)

On note que les simulations des contraintes de cisaillement et d’arrachement d’interface sont concordantes pour les deux modèles utilisés hors leur intensité en bord de fissure comme attendu.

Dans le tableau 3.1 suivant, on reporte ainsi les temps de calcul CPU obtenus pour les deux modélisations utilisées ici pour ce cas 2D déformations planes. On remarque que, pour le même maillage, le temps obtenu pour le M4-5nW est très intéressant pour des analyses paramétriques diverses comparé aux éléments finis (6 fois plus rapide). A noter que pour le M4-5nW, ce temps de calcul donnant des intensités de contraintes convergentes à l’interface au droit d’une fissure est intéressant pour le maillage progressif utilisé par rapport à un maillage régulier très fin de 0.001m de largeur (2165 s CPU) puisqu’on est passé de 20001 nœuds à 198 nœuds dans ce cas (0.89 s CPU).

TABLE 3.1 – Comparaison des temps de calcul CPU des deux outils à même maillage progressif pour la chaussée fissurée étudiée (Figure 3.1)

	M4-5nW	EF
Temps CPU (s)	0.89	5.4

Ces résultats montrent l’intérêt du M4-5nW ainsi construit. Les calculs analytiques et la résolution numérique du système d’équations sont ainsi également validés dans le cas de référence 2D déformations planes.

3.4.2 Analyse d'une chaussée soumise à un chargement roulant

Afin d'illustrer le cas le plus défavorable en terme de possibilité de générer du décollement d'interface entre les couches 2,3 lors du phénomène de fissuration réfléctive, les intensités des contraintes d'interface M4-5nW étant finies aux bords de fissures, nous comparons finalement, avec l'outil précédent M4-5nW ainsi développé, les effets d'une charge par rapport à une fissure, située dans la 3ème couche.

Les Figures 3.16 and 3.17 présentent respectivement les efforts d'interface de cisaillement $\tau_1^{2,3}(x)$ et d'arrachement $\nu^{2,3}(x)$ entre les couches 2 et 3 pour 4 cas de chargements : charge au centre d'une chaussée non fissurée (cas a) ; charge située à 1m à gauche de la fissure située dans la 3ème couche (cas b1) ; charge située à 0.5m à gauche de la fissure (cas b2) ; charge au bord gauche de la fissure (cas b3).

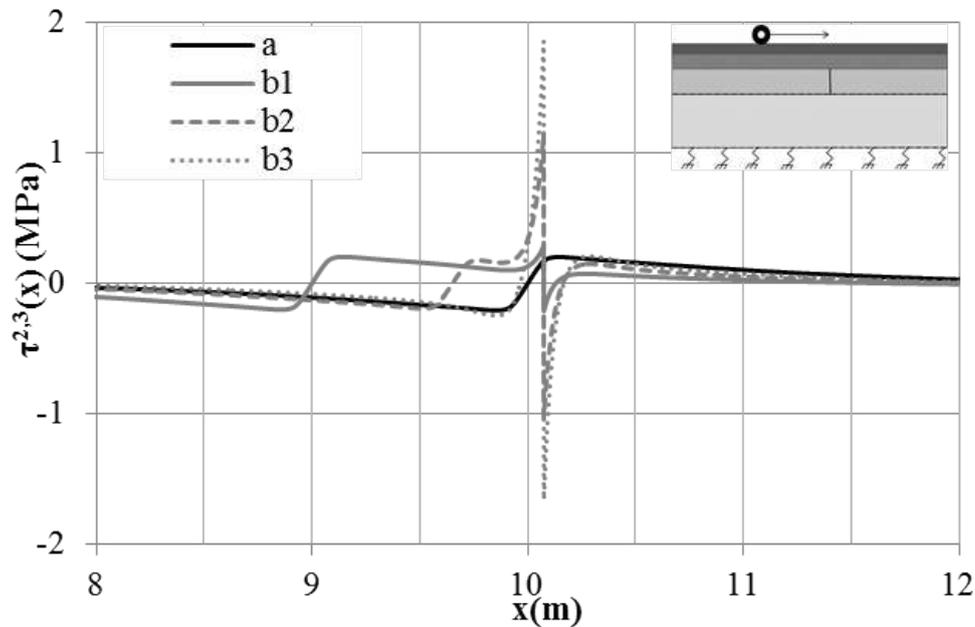


FIGURE 3.16 – Comparaison de la distribution des efforts d'interface de cisaillement pour le M4-5nW à l'interface entre les couches 2 et 3 pour 4 positions de charge différentes (Nasser and Chabot, 2015b), (Nasser and Chabot, 2016)

Tout d'abord, en raison du fait que pour le M4-5nW, l'intensité des contraintes de cisaillement et d'arrachement à l'interface est finie près de la fissure, nous pouvons comparer les différents résultats entre eux. Pour le cas de la chaussée non fissurée (cas a), les courbes représentant respectivement les efforts de cisaillement et d'arrachement sont symétriques à l'emplacement de la charge. Le maximum de la valeur de ces contraintes est faible. Pour le cas de chaussée fissurée et le maximum de l'intensité de ces efforts près de la fissure à l'interface 2,3 (juste au-dessus de la fissure) augmente, comme attendu (Tran, 2004), (Chabot et al., 2005), lorsque la charge se déplace vers la position de la fissure. Elle atteint sa valeur maximale pour le cas b3, c'est à dire lorsque la charge est au bord de la fissure.

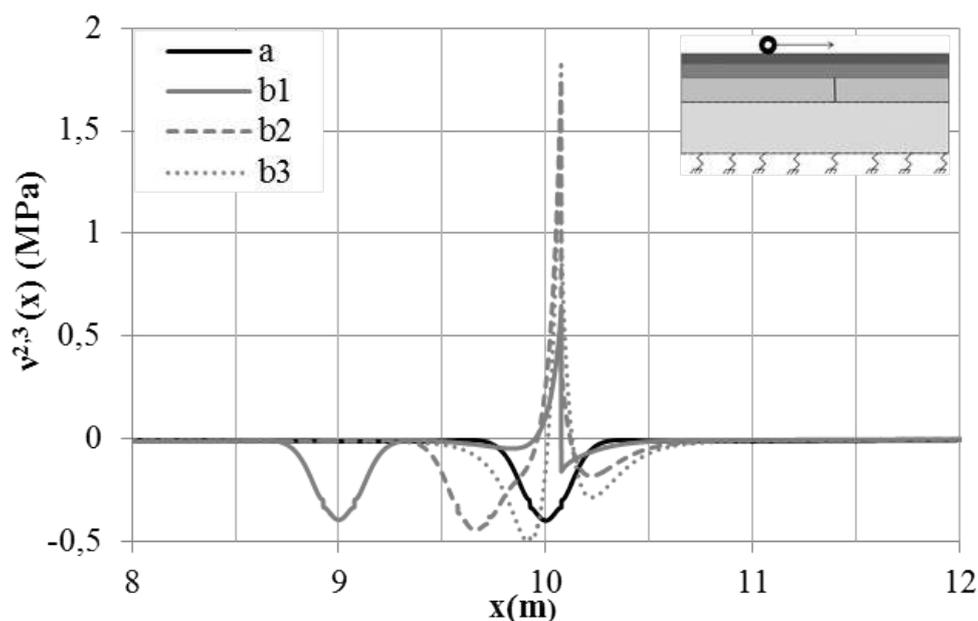


FIGURE 3.17 – Comparaison de la distribution des efforts d’interface d’arrachement pour le M4-5nW à l’interface entre les couches 2 et 3 pour 4 positions de charge différentes (Nasser and Chabot, 2015b), (Nasser and Chabot, 2016)

Si la résistance de l’interface est plus petite que celle du matériau de la couche 2 (qui travaille dans des conditions de tension en sa base), un phénomène de décollement peut ainsi arriver dans un mode mixte de rupture (Figure 2.1). Ce phénomène peut se produire soit sous une charge lourde ou par fatigue due à la circulation des charges.

Avec le nouvel outil M4-5nW ainsi développé en 2D déformations planes, cette courte analyse conforte ainsi le constat que la position de la charge la plus défavorable par rapport à la fissure est en son bord. Le risque d’endommagement d’une chaussée où la charge est située au bord d’une fissure verticale est beaucoup plus élevé que pour d’autres positions de chargement. Il suffit d’étudier ce cas dans toute analyse 2D de chaussée mono fissurée verticalement le long d’une couche.

3.5 Bilan

Dans ce chapitre, nous proposons ainsi un outil de calcul 2D performant pour la modélisation d’une structure de chaussée comportant des fissures transversales à la circulation de charge. Cet outil s’appuie sur un modèle alternatif de structures multicouches dévoué à une analyse simplifiée des problèmes de décollement, le M4-5n. La structure de chaussée est choisie équivalente à l’empilement de trois couches élastiques reposant sur un massif sol. Le sol est supposé être équivalent à une couche de cisaillement ajoutée à un massif de Winkler (W) pour assurer le transfert des contraintes de cisaillement entre la chaussée et le sol. L’ensemble de la chaussée et du sol constitue le M4-5nW. Toutes les couches sont modélisées par le M4-5n. Cette nouvelle approche pour modéliser les chaussées est ainsi nommée

M4-5nW et constitue le cas de référence 2D déformations planes.

En 2D, l'écriture analytique ainsi que la résolution numérique du système d'équations différentielles d'ordre 2 pour les 4 couches modélisées par le M4-5n, utilisant la méthode de différences finies implémentée dans Scilab montre l'efficacité de l'outil développé par comparaison des résultats avec ceux obtenus par un outil élément fini classique avec un gain de temps CPU très prometteur. Ce gain de temps est dû au M4-5n qui réduit d'une dimension le problème étudié et permet de déterminer l'intensité des champs mécaniques au droit des fissures sans rencontrer de problèmes de singularité. Pour atteindre ces intensités, il est cependant nécessaire d'optimiser la discrétisation de l'espace. Il est aussi dû au choix de la modélisation du sol et au maillage choisi ainsi qu'à l'écriture simplifiée des matrices nécessaires à la résolution du problème. Entre deux couches consécutives et de matériaux différents, il est ainsi théoriquement possible d'exprimer un critère de délaminage à partir des efforts d'interface. Bien que le nombre d'inconnus à résoudre soit en revanche assez grand, la résolution semi analytique des équations de ce modèle (par l'écriture des matrices et l'utilisation de la méthode des différences finies) permet de réaliser par ailleurs des études paramétriques faciles et rapides. Cet outil répond ainsi au cahier des charges initial de construction d'un outil de modélisation de type bureau d'études notamment pour l'analyse des champs mécaniques dans les chaussées fissurées.

La prise en compte du gradient thermique dans la chaussée est en outre également possible dans le M4-5nW ainsi développé (Tran, 2004) (Chabot et al., 2005). Pour ce faire, les équations et les matrices sont données dans le deuxième chapitre. Des décollements partiels d'interface peuvent être introduits afin d'investiguer et de comparer les résultats M4-5nW avec ceux d'expérimentations effectuées sur des structures en vraie grandeur (Pouteau, 2004)(Chabot et al., 2008). Le calcul du taux de restitution d'énergie générée lors de la fissuration constitue aussi un point de comparaison possible avec d'autres types de modélisation (Chabot et al., 2013).

La prochaine étape consiste à développer le M4-5nW en 3D. Pour ce faire, on peut reprendre la même méthode de résolution par différences finies développée en 2D, la généraliser en 3D et la programmer. Mais dans l'objectif de ne pas tout recréer à partir de zéro et d'utiliser un outil de calcul éléments finis existant et source libre, nous cherchons par la suite à développer une méthode de résolution des équations du M4-5n basée sur la méthode des éléments finis mixtes. Cette méthode est choisie car le M4-5n est basé sur la formulation mixte d'Hellinger-Reissner (Eq. 2.2). Ajoutons à ça, l'existence du logiciel gratuit FreeFem++ (Hecht, 2011) qui permet de résoudre numériquement des équations différentielles par éléments finis.

Le développement de la méthode des éléments finis mixtes pour résoudre le M4-5nW fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Développement numérique de l'outil de calcul 3D – Résolution générale du M4-5nW par la méthode des éléments finis mixtes (EFM)

Dans ce chapitre, le développement de la méthode de résolution du M4-5nW utilisant les éléments finis mixtes est présentée. Le choix de cette méthode de résolution est naturel ici compte tenu de la méthode de construction du M4-5n basé sur la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner qui conduit à l'expression de densités d'énergie élastique exprimée en fonction des contraintes généralisées. L'application de ces formules mixtes est également connue comme conduisant à des méthodes précises d'évaluation par éléments finis des efforts dans les problèmes de plaques.

Le point de départ de la méthode développée est l'écriture du principe variationnel basé sur le théorème de l'énergie complémentaire où la condition de contraintes statiquement admissibles est prise en compte par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. La formulation mixte est obtenue en exprimant la stationnarité du Lagrangien par rapport à tous les champs. L'identification des multiplicateurs de Lagrange est établie à partir de l'expression des champs de déformations et de déplacements généralisés du M4-5n. On obtient alors une fonctionnelle équivalente à celle d'Hellinger-Reissner écrite en champs généralisés pour le M4-5n.

La discrétisation est effectuée par la méthode des éléments finis mixtes en faisant appel à des espaces d'interpolation permettant d'assurer le bon conditionnement du système d'équations algébriques à résoudre. La méthode développée est implémentée dans FreeFem++, logiciel de résolution par éléments finis des problèmes aux dérivées partielles basé sur l'énoncé des formulations faibles à l'intérieur de scripts.

Commençons par rappeler dans le cadre général de problèmes élastiques le théorème de l'énergie complémentaire.

4.1 Théorème de l'énergie complémentaire et formulation d'Hellinger-Reissner

Il existe deux théorèmes énergétiques classiques : le théorème de l'énergie potentielle et le théorème de l'énergie complémentaire. Le premier est basé sur la minimisation de l'énergie potentielle sur l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles (C.A.). Le second sur la maximisation de l'énergie complémentaire sur l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles (S.A.) vérifiant les équations d'équilibre en volume dans un domaine Ω et les conditions limites en efforts sur $\partial\Omega_T$ (Figure 2.4).

Pour tout champ S.A. σ_{ij}^* l'énergie complémentaire $E_c(\sigma_{ij}^*)$ s'écrit :

$$E_c(\sigma_{ij}^*) = -W(\sigma_{ij}^*) + T_u^d(\sigma_{ij}^*) \quad (4.1)$$

où $W(\sigma_{ij}^*)$ représente l'énergie élastique en contrainte et $T_u^d(\sigma_{ij}^*)$ représente le travail de σ_{ij}^* sur la frontière à déplacements imposés $\partial\Omega_U$ (Eq. 4.2).

$$W(\sigma_{ij}^*) = \int_{\Omega} w(\sigma_{ij}^*) d\Omega, \quad T_u^d(\sigma_{ij}^*) = \int_{\partial\Omega_U} (\sigma_{ij}^* n_j) U^d ds \quad (4.2)$$

On utilise ici la convention de sommation sur les indices répétés.

$w(\sigma_{ij}^*)$ représente la densité d'énergie élastique en contraintes permettant d'exprimer la loi de comportement élastique sous la forme :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.3)$$

Dans le cas élastique linéaire, w est une forme quadratique définie positive

$$w(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (4.4)$$

Associée à la loi de comportement,

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (4.5)$$

où S_{ijkl} est le tenseur de souplesse.

Le théorème de l'énergie complémentaire dit alors que : "Toute solution σ_{ij} du problème initial réalise un maximum de l'énergie complémentaire sur l'ensemble des champs statiquement admissibles. Cette solution est unique dans le cas élastique linéaire" (Eq. 4.6) :

$$\forall \sigma_{ij}^* \text{ S.A.}, \quad \sigma_{ij}^* \neq \sigma_{ij} \quad E_c(\sigma_{ij}^*) < E_c(\sigma_{ij}) \quad (4.6)$$

Fonctionnelle d'Hellinger-Reissner

La fonctionnelle d'Hellinger-Reissner déjà rencontrée au chapitre 2 (Eq. 2.2), peut être obtenue à partir du théorème de l'énergie complémentaire. La démarche consiste à relaxer la condition de champs de contraintes S.A. à l'aide de multiplicateurs de Lagrange $\tilde{\lambda}_i(x)$ définis sur Ω et $\tilde{\mu}_i(x)$ sur $\partial\Omega_T$. Nous notons $\tilde{\sigma}_{ij}$ les champs de contraintes relaxés pour les différencier des champs S.A.

$$L(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\lambda}_i, \tilde{\mu}_i) = E_c(\tilde{\sigma}_{ij}) + \int_{\Omega} \tilde{\lambda}_i(\tilde{\sigma}_{ij,j} + f_i)d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \tilde{\mu}_i(\tilde{\sigma}_{ij}n_j - T_i^d)dS \quad (4.7)$$

Cette fonctionnelle est alors stationnaire pour la solution $(\sigma_{ij}, \lambda_i, \mu_i)$.

Pour se ramener à la fonctionnelle H-R, on effectue une intégration par partie du second terme conduisant à l'expression suivante (Eq. 4.8) :

$$L(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\lambda}_i, \tilde{\mu}_i) = E_c(\tilde{\sigma}_{ij}) - \int_{\Omega} \tilde{\lambda}_{i,j}\tilde{\sigma}_{ij}d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\lambda}_i f_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \tilde{\lambda}_i \tilde{\sigma}_{ij} n_j dS + \int_{\partial\Omega_T} \tilde{\mu}_i(\tilde{\sigma}_{ij}n_j - T_i^d)dS \quad (4.8)$$

Soit encore en prenant pour les $\tilde{\mu}_i$ l'opposé des valeurs des champs $\tilde{\lambda}_i$ sur le bord $\partial\Omega_T$ et tenant compte de l'expression de E_c et de la symétrie du tenseur $\tilde{\sigma}_{ij}$:

$$L(\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{\lambda}_i, \tilde{\mu}_i) = \int_{\Omega} \left[-\tilde{\sigma}_{ij} \frac{\tilde{\lambda}_{i,j} + \tilde{\lambda}_{j,i}}{2} d\Omega + f_i \tilde{\lambda}_i - w(\tilde{\sigma}_{ij}) \right] d\Omega + \int_{\partial\Omega_U} (\tilde{\sigma}_{ij}n_j)(\tilde{\lambda}_i + U_i^d)dS - \int_{\partial\Omega_T} \tilde{\mu}_i T_i^d dS \quad (4.9)$$

En posant $\tilde{\lambda}_i = -\tilde{U}_i$, on retrouve l'expression de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner (Eq. 2.2) en l'absence de champs de déformations anélastiques et de surfaces de discontinuités.

Le champ solution est alors point selle de L.

On adopte une démarche identique à celle-ci pour établir la formulation variationnelle mixte en champs généralisés du M4-5n.

4.2 Formulation mixte du M4-5n

Pour établir celle-ci, commençons par appliquer le théorème de l'énergie complémentaire au M4-5n, en utilisant la densité d'énergie élastique w liée aux contraintes généralisées des couches M4-5n déduite des expressions des Eq.s 2.61, 2.62, 2.63 données dans le chapitre 2.

4.2.1 Calcul de la densité d'énergie élastique en contraintes du M4-5n

La densité d'énergie élastique en contraintes w pour le M4-5n (Eq. 4.10) s'obtient comme somme sur l'ensemble des couches des densités d'énergie liés aux efforts membranaires, aux efforts normaux et aux efforts de cisaillement :

$$w = \sum_{i=1}^n \left(w_c^{5n^i} + w_\nu^{5n^i} + w_Q^{5n^i} \right) \quad (4.10)$$

Sous forme développée, les termes $w_c^{5n^i}$, $w_\nu^{5n^i}$ et $w_Q^{5n^i}$ s'écrivent :

$$w_c^{5n^i} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{e^i E^i} \left(N_{11}^{i^2} + N_{22}^{i^2} + 2N_{12}^{i^2} (1 + \nu^i) - 2\nu^i N_{11}^i N_{22}^i \right) + \frac{12}{e^{i^3} E^i} \left(M_{11}^{i^2} + M_{22}^{i^2} + 2M_{12}^{i^2} (1 + \nu^i) - 2\nu^i M_{11}^i M_{22}^i \right) \right] \quad (4.11)$$

$$w_\nu^{5n^i} = \frac{1}{2} \left[\frac{13e^i}{35E^i} \left(\nu^{i-1,i^2} + \nu^{i,i+1^2} \right) + \frac{9e^i}{35E^i} \nu^{i-1,i} \nu^{i,i+1} \right] \quad (4.12)$$

$$w_Q^{5n^i} = \frac{1}{2} \left[\frac{12(1 + \nu^i)}{5e^i E^i} \left(Q_1^{i^2} + Q_2^{i^2} \right) + \frac{4e^i(1 + \nu^i)}{15E^i} \left(\tau_1^{i-1,i^2} + \tau_1^{i,i+1^2} + \tau_2^{i-1,i^2} + \tau_2^{i,i+1^2} \right) - \frac{2e^i(1 + \nu^i)}{15E^i} \left(\tau_1^{i-1,i} \tau_1^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i} \tau_2^{i,i+1} \right) - \frac{2(1 + \nu^i)}{5E^i} \left(Q_1^i (\tau_1^{i-1,i} + \tau_1^{i,i+1}) + Q_2^i (\tau_2^{i-1,i} + \tau_2^{i,i+1}) \right) \right] \quad (4.13)$$

On obtient ainsi l'expression de la densité d'énergie élastique w du M4-5n pour un multicouche de n couches en 3D (Eq. 4.14)

$$\begin{aligned} & w(N_{11}^i, N_{22}^i, N_{12}^i, M_{11}^i, M_{22}^i, M_{12}^i, Q_1^i, Q_2^i, \tau_1^{i,i+1}, \tau_2^{i,i+1}, \nu^{i,i+1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{e^i E^i} \left(N_{11}^{i^2} + N_{22}^{i^2} + 2N_{12}^{i^2} (1 + \nu^i) - 2\nu^i N_{11}^i N_{22}^i \right) + \frac{12(1 + \nu^i)}{e^{i^3} E^i} \left(M_{11}^{i^2} + M_{22}^{i^2} + 2M_{12}^{i^2} (1 + \nu^i) - 2\nu^i M_{11}^i M_{22}^i \right) + \frac{13e^i}{35E^i} \left(\nu^{i-1,i^2} + \nu^{i,i+1^2} \right) + \frac{9e^i}{35E^i} \nu^{i-1,i} \nu^{i,i+1} + \frac{4e^i(1 + \nu^i)}{15E^i} \left(\tau_1^{i-1,i^2} + \tau_1^{i,i+1^2} + \tau_2^{i-1,i^2} + \tau_2^{i,i+1^2} \right) - \frac{2e^i(1 + \nu^i)}{15E^i} \left(\tau_1^{i-1,i} \tau_1^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i} \tau_2^{i,i+1} \right) - \frac{2(1 + \nu^i)}{5E^i} \left(Q_1^i (\tau_1^{i-1,i} + \tau_1^{i,i+1}) + Q_2^i (\tau_2^{i-1,i} + \tau_2^{i,i+1}) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

La dérivation de ce potentiel par rapport aux efforts généralisés nous permet à travers les lois de comportement données au chapitre 2 (Eqs. 2.38 à 2.42) d'identifier les déformations généralisées duales associées à ces efforts :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial N_{11}^i} = \frac{1}{e^i E^i} (N_{11}^i - v^i N_{22}^i) = \varepsilon_{11}^i \\ \frac{\partial w}{\partial N_{22}^i} = \frac{1}{e^i E^i} (N_{22}^i - v^i N_{11}^i) = \varepsilon_{22}^i \\ \frac{\partial w}{\partial N_{12}^i} = \frac{2(1+v^i)}{e^i E^i} N_{12}^i = 2\varepsilon_{12}^i \\ \frac{\partial w}{\partial M_{11}^i} = \frac{12}{e^{i3} E^i} (M_{11}^i - v^i M_{22}^i) = \chi_{11}^i \\ \frac{\partial w}{\partial M_{22}^i} = \frac{12}{e^{i3} E^i} (M_{22}^i - v^i M_{11}^i) = \chi_{22}^i \\ \frac{\partial w}{\partial M_{12}^i} = \frac{24(1+v^i)}{e^{i3} E^i} M_{12}^i = 2\chi_{12}^i \\ \frac{\partial w}{\partial Q_1^i} = \frac{12(1+v^i)}{5e^i E^i} Q_1^i - \frac{1+v^i}{5E^i} (\tau_1^{i-1,i} + \tau_1^{i,i+1}) = d_1^i \\ \frac{\partial w}{\partial Q_2^i} = \frac{12(1+v^i)}{5e^i E^i} Q_2^i - \frac{1+v^i}{5E^i} (\tau_2^{i-1,i} + \tau_2^{i,i+1}) = d_2^i \end{array} \right. \quad (4.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial \tau_1^{i,i+1}} = -\frac{1+v^i}{5E^i} Q_1^i(x,y) - \frac{1+v^{i+1}}{5E^{i+1}} Q_1^{i+1}(x,y) - \frac{e^i(1+v^i)}{15E^i} \tau_1^{i-1,i} \\ -\frac{e^{i+1}(1+v^{i+1})}{15E^{i+1}} \tau_1^{i+1,i+2} + \frac{4}{15} \left(\frac{e^i(1+v^i)}{E^i} + \frac{e^{i+1}(1+v^{i+1})}{E^{i+1}} \right) \tau_1^{i,i+1} = D_1^{i,i+1} \\ \frac{\partial w}{\partial \tau_2^{i,i+1}} = -\frac{1+v^i}{5E^i} Q_2^i - \frac{1+v^{i+1}}{5E^{i+1}} Q_2^{i+1} - \frac{e^i(1+v^i)}{15E^i} \tau_2^{i-1,i} \\ -\frac{e^{i+1}(1+v^{i+1})}{15E^{i+1}} \tau_2^{i+1,i+2} + \frac{2}{15} \left(\frac{2e^i(1+v^i)}{E^i} + \frac{2e^{i+1}(1+v^{i+1})}{E^{i+1}} \right) \tau_2^{i,i+1} = D_2^{i,i+1} \\ \frac{\partial w}{\partial \nu^{i,i+1}} = \frac{9e^i}{70E^i} \nu^{i-1,i} + \frac{9e^{i+1}}{70E^{i+1}} \nu^{i+1,i+2} + \frac{13}{35} \left(\frac{e^i}{E^i} + \frac{e^{i+1}}{E^{i+1}} \right) \nu^{i,i+1} = D_3^{i,i+1} \end{array} \right.$$

Dans le cas d'un problème à déplacements imposés nuls comme considéré dans la suite, l'énergie complémentaire du M4-5n sur le domaine ω du plan (x,y) prend alors l'expression :

$$E_c = - \int_{\omega} w dS \quad (4.16)$$

4.2.2 Rappel de la formulation forte du problème

Rappelons ici l'ensemble des équations du M4-5n définissant la formulation forte du problème à résoudre et qui nous sont utiles pour la suite. Pour simplifier les écritures, on se place directement dans le cadre de conditions limites nulles portant, pour une couche donnée, soit sur l'ensemble des composantes d'efforts (bord libre, fissure) soit sur l'ensemble des composantes de déplacements (bord encastré).

La formulation forte comprend ainsi :

- les équations d'équilibre dans le domaine ω du plan (x,y) prenant en compte les efforts donnés sur les faces supérieure et inférieure du multicouche, supposés ici nuls sauf pour la composante verticale $q(x,y)$ de l'effort imposé en surface (considérée positive vers le bas) :

$$\begin{cases} N_{11,1}^i + N_{12,2}^i + \tau_1^{i,i+1} - \tau_1^{i-1,i} = 0 \\ N_{12,1}^i + N_{22,2}^i + \tau_2^{i,i+1} - \tau_2^{i-1,i} = 0 \\ M_{11,1}^i + M_{12,2}^i - Q_1^i + \frac{e^i}{2}(\tau_1^{i,i+1} + \tau_1^{i-1,i}) = 0 \\ M_{12,1}^i + M_{22,2}^i - Q_2^i + \frac{e^i}{2}(\tau_2^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i}) = 0 \\ Q_{1,1}^i + Q_{2,2}^i + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} \tau_1^{0,1} = 0 \\ \tau_2^{0,1} = 0 \\ \nu^{0,1} = -q(x, y) \\ \tau_1^{n,n+1} = 0 \\ \tau_2^{n,n+1} = 0 \\ \nu^{n,n+1} = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

- les équations de compatibilité cinématique dans le plan (x,y) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^i = U_{1,1}^i \\ \varepsilon_{22}^i = U_{2,2}^i \\ \varepsilon_{12}^i = \frac{1}{2}(U_{1,2}^i + U_{2,1}^i) \\ \chi_{11}^i = \phi_{1,1}^i \\ \chi_{22}^i = \phi_{2,2}^i \\ \chi_{12}^i = \frac{1}{2}(\phi_{1,2}^i + \phi_{2,1}^i) \\ d_1^i = \phi_1^i + U_{3,1}^i \\ d_2^i = \phi_2^i + U_{3,2}^i \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} D_1^{i,i+1} = U_1^{i+1} - U_1^i - \frac{e^i}{2}\phi_1^i - \frac{e^{i+1}}{2}\phi_1^{i+1} \\ D_2^{i,i+1} = U_2^{i+1} - U_2^i - \frac{e^i}{2}\phi_2^i - \frac{e^{i+1}}{2}\phi_2^{i+1} \\ D_3^{i,i+1} = U_3^{i+1} - U_3^i \end{cases} \quad (4.20)$$

- les équations de comportement rappelées en section 4.2.1.

- la partition des frontières $\partial\omega_U^i$ et $\partial\omega_T^i$ à déplacements nuls et à efforts nuls respectivement :

$$\text{Couche à bord libre} \left\{ \begin{array}{l} N_{11}^i n_1 + N_{12}^i n_2 = 0 \\ N_{12}^i n_1 + N_{22}^i n_2 = 0 \\ M_{11}^i n_1 + M_{12}^i n_2 = 0 \\ M_{12}^i n_1 + M_{22}^i n_2 = 0 \\ Q_1^i n_1 + Q_2^i n_2 = 0 \end{array} \right. , \quad \text{Couche à bord encastéré} \left\{ \begin{array}{l} U_1^i = 0 \\ U_2^i = 0 \\ \phi_1^i = 0 \\ \phi_2^i = 0 \\ U_3^i = 0 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

4.2.3 Application du théorème de l'énergie complémentaire avec utilisation des multiplicateurs de Lagrange

Nous allons admettre ici dans un premier temps que la résolution de la formulation forte du M4-5n est équivalente au théorème de l'énergie complémentaire appliqué à l'expression E_c (Eq. 4.16) sur l'ensemble des champs de contraintes généralisés S.A. (*i.e.* vérifiant les équations d'équilibre et les conditions limites en efforts de la formulation forte).

En nous inspirant de la démarche exposée dans la section 4.1, nous allons alors introduire l'expression du Lagrangien L associé à la formulation forte du M4-5n. On vérifiera *a posteriori* que la stationnarité de celui-ci est bien équivalente à la formulation forte, ce qui validera en même temps notre hypothèse ci-dessus.

En partant de l'expression de l'énergie complémentaire et des équations d'équilibre (Eq. 4.17) prises en compte par champs de multiplicateurs de Lagrange $\tilde{\lambda}_\gamma^i(x, y)$ et des conditions limites en efforts (Eq. 4.21) prises en compte par champs de multiplicateurs de Lagrange $\tilde{\mu}_\gamma^i(x, y)$, nous obtenons l'expression du Lagrangien suivante (Eq. 4.22). Afin d'alléger les écritures, les champs de contraintes généralisés relaxés et l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange sont notés en omettant les tildes ($\tilde{\cdot}$).

$$\begin{aligned} L(N_{11}^i, N_{22}^i, N_{12}^i, M_{11}^i, M_{22}^i, M_{12}^i, Q_1^i, Q_2^i, \underbrace{\tau_1^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\tau_2^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\nu^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i, \lambda_4^i, \lambda_5^i, \mu_1^i, \mu_2^i, \mu_3^i, \mu_4^i, \mu_5^i) \\ = - \int_\omega w dS + \sum_{i=1}^n \left[\int_\omega \left[\lambda_1^i \left(N_{11,1}^i + N_{12,2}^i + \tau_1^{i,i+1} - \tau_1^{i-1,i} \right) \right. \right. \\ + \lambda_2^i \left(N_{22,2}^i + N_{12,1}^i + \tau_2^{i,i+1} - \tau_2^{i-1,i} \right) + \lambda_3^i \left(M_{11,1}^i + M_{12,2}^i - Q_1^i + \frac{e^i}{2} (\tau_1^{i,i+1} + \tau_1^{i-1,i}) \right) \\ + \lambda_4^i \left(M_{12,1}^i + M_{22,2}^i - Q_2^i + \frac{e^i}{2} (\tau_2^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i}) \right) + \lambda_5^i \left(Q_{1,1}^i + Q_{2,2}^i + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i} \right) \left. \right] dS \\ + \sum_{i=1}^n \left[\int_{\partial\omega_T^i} \left[\mu_1^i (N_{11}^i n_1 + N_{12}^i n_2) + \mu_2^i (N_{22}^i n_2 + N_{12}^i n_1) + \mu_3^i (M_{11}^i n_1 + M_{12}^i n_2) + \mu_4^i (M_{12}^i n_1 \right. \right. \\ \left. \left. + M_{22}^i n_2) + \mu_5^i (Q_1^i n_1 + Q_2^i n_2) \right] dl \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dans cette expression, les quantités $\tau_1^{0,1}$, $\tau_2^{0,1}$, $\nu^{0,1}$, $\tau_1^{n,n+1}$, $\tau_2^{n,n+1}$ et $\nu^{n,n+1}$ sont considérées comme connues et égales aux valeurs données dans l'Eq. 4.18. On peut alors tenir compte de ces valeurs directement dans la formulation forte et supprimer les quantités ci-avant du problème. Ces dernières ne font pas partie des arguments de la fonctionnelle L.

Après intégration par parties pour éliminer les dérivées spatiales sur les efforts généralisés, L devient (Eq. 4.23) :

$$\begin{aligned}
 & L(N_{11}^i, N_{22}^i, N_{12}^i, M_{11}^i, M_{22}^i, M_{12}^i, Q_1^i, Q_2^i, \underbrace{\tau_1^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\tau_2^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\nu^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i, \lambda_4^i, \lambda_5^i, \mu_1^i, \mu_2^i, \mu_3^i, \mu_4^i, \mu_5^i) \\
 &= - \int_{\omega} wdS + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[- (\lambda_{1,1}^i N_{11}^i + \lambda_{1,2}^i N_{12}^i) + (\tau_1^{i,i+1} - \tau_1^{i-1,i}) \lambda_1^i - (\lambda_{2,2}^i N_{22}^i + \lambda_{2,1}^i N_{12}^i) \right. \\
 &+ (\tau_2^{i,i+1} - \tau_2^{i-1,i}) \lambda_2^i - (\lambda_{3,1}^i M_{11}^i + \lambda_{3,2}^i M_{12}^i) - \lambda_3^i Q_1^i + \frac{e^i}{2} (\tau_1^{i,i+1} + \tau_1^{i-1,i}) \lambda_3^i - (\lambda_{4,2}^i M_{22}^i + \lambda_{4,1}^i M_{12}^i) \\
 &- \lambda_4^i Q_2^i + \frac{e^i}{2} (\tau_2^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i}) \lambda_4^i - (\lambda_{5,1}^i Q_1^i + \lambda_{5,2}^i Q_2^i) + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \lambda_5^i \left. \right] dS \\
 &+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_T^i} \left[(N_{11}^i n_1 + N_{12}^i n_2) (\lambda_1^i + \mu_1^i) + (N_{22}^i n_2 + N_{12}^i n_1) (\lambda_2^i + \mu_2^i) - (M_{11}^i n_1 + M_{12}^i n_2) (\lambda_3^i + \mu_3^i) \right. \\
 &- (M_{22}^i n_2 + M_{12}^i n_1) (\lambda_4^i + \mu_4^i) + (Q_1^i n_1 + Q_2^i n_2) (\lambda_5^i + \mu_5^i) \left. \right] dl + \sum_{i=1}^n \left[\int_{\partial\omega_U^i} \left[\lambda_1^i (N_{11}^i n_1 + N_{12}^i n_2) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \lambda_2^i (N_{22}^i n_2 + N_{12}^i n_1) + \lambda_3^i (M_{11}^i n_1 + M_{12}^i n_2) + \lambda_4^i (M_{12}^i n_1 + M_{22}^i n_2) + \lambda_5^i (Q_1^i n_1 + Q_2^i n_2) \right] dl \right] \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Faisons alors le choix pour les multiplicateurs μ_γ^i ($\gamma \in \{1, 5\}$) d'être égaux à l'opposé des fonctions λ_γ^i sur le bord $\partial\omega_T^i$. Ceci fait disparaître les intégrales sur la frontière $\partial\omega_T^i$ dans l'expression 4.23. On obtient alors les deux expressions suivantes de L avant (Eq. 4.24) et après (Eq. 4.25) intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 & L(N_{11}^i, N_{22}^i, N_{12}^i, M_{11}^i, M_{22}^i, M_{12}^i, Q_1^i, Q_2^i, \underbrace{\tau_1^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\tau_2^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\nu^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i, \lambda_4^i, \lambda_5^i) \\
 &= - \int_{\omega} wdS + \sum_{i=1}^n \left[\int_{\omega} \left[\lambda_1^i (N_{11,1}^i + N_{12,2}^i + \tau_1^{i,i+1} - \tau_1^{i-1,i}) \right. \right. \\
 &+ \lambda_2^i (N_{22,2}^i + N_{12,1}^i + \tau_2^{i,i+1} - \tau_2^{i-1,i}) + \lambda_3^i (M_{11,1}^i + M_{12,2}^i - Q_1^i + \frac{e^i}{2} (\tau_1^{i,i+1} + \tau_1^{i-1,i})) \\
 &+ \lambda_4^i (M_{12,1}^i + M_{22,2}^i - Q_2^i + \frac{e^i}{2} (\tau_2^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i})) + \lambda_5^i (Q_{1,1}^i + Q_{2,2}^i + \nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \left. \right] dS \left. \right] \\
 &- \sum_{i=1}^n \left[\int_{\partial\omega_T^i} \left[\lambda_1^i (N_{11}^i n_1 + N_{12}^i n_2) + \lambda_2^i (N_{22}^i n_2 + N_{12}^i n_1) + \lambda_3^i (M_{11}^i n_1 + M_{12}^i n_2) + \lambda_4^i (M_{12}^i n_1 \right. \right. \\
 &\left. \left. + M_{22}^i n_2) + \lambda_5^i (Q_1^i n_1 + Q_2^i n_2) \right] dl \right] \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & L(N_{11}^i, N_{22}^i, N_{12}^i, M_{11}^i, M_{22}^i, M_{12}^i, Q_1^i, Q_2^i, \underbrace{\tau_1^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\tau_2^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\nu^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i, \lambda_4^i, \lambda_5^i) \\
 &= - \int_{\omega} w dS + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[- (\lambda_{1,1}^i N_{11}^i + \lambda_{1,2}^i N_{12}^i) + (\tau_1^{i,i+1} - \tau_1^{i-1,i}) \lambda_1^i - (\lambda_{2,2}^i N_{22}^i + \lambda_{2,1}^i N_{12}^i) \right. \\
 &+ (\tau_2^{i,i+1} - \tau_2^{i-1,i}) \lambda_2^i - (\lambda_{3,1}^i M_{11}^i + \lambda_{3,2}^i M_{12}^i) - \lambda_3^i Q_1^i + \frac{e^i}{2} (\tau_1^{i,i+1} + \tau_1^{i-1,i}) \lambda_3^i - (\lambda_{4,2}^i M_{22}^i + \lambda_{4,1}^i M_{12}^i) \\
 &- \lambda_4^i Q_2^i + \frac{e^i}{2} (\tau_2^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i}) \lambda_4^i - (\lambda_{5,1}^i Q_1^i + \lambda_{5,2}^i Q_2^i) + (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \lambda_5^i \left. \right] dS \\
 &+ \sum_{i=1}^n \left[\int_{\partial \omega_T^i} \left[\lambda_1^i (N_{11}^i n_1 + N_{12}^i n_2) + \lambda_2^i (N_{22}^i n_2 + N_{12}^i n_1) + \lambda_3^i (M_{11}^i n_1 + M_{12}^i n_2) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \lambda_4^i (M_{12}^i n_1 + M_{22}^i n_2) + \lambda_5^i (Q_1^i n_1 + Q_2^i n_2) \right] dl \right] \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

4.2.4 Equivalence de la stationnarité du Lagrangien avec la formulation forte

Vérifions maintenant que la solution rendant stationnaire le Lagrangien L par rapport à tous les champs dont il dépend, vérifie bien les équations du problème initial. Nous utilisons pour cela les différentielles δL des deux expressions 4.24 et 4.25.

Sous sa forme donnée dans l'Eq. 4.24, la stationnarité de L par rapport à λ_{γ}^i ($\frac{\delta L}{\delta \lambda_{\gamma}^i} = 0$) permet de montrer dans un premier temps qu'elle implique les équations d'équilibre à l'intérieur du domaine ω (Eq. 4.17). La stationnarité de L par rapport aux valeurs λ_{γ}^i sur le bord $\partial \omega_T^i$ permet de retrouver dans un second temps les conditions limites en efforts, nuls en l'occurrence, du problème initial (Eq. 4.21).

Afin d'étudier les implications de la stationnarité de L par rapport aux efforts, nous utilisons l'expression (Eq. 4.25) obtenue à l'aide de l'intégration par parties. Ecrivons la variation de cette expression par rapports aux efforts généralisés de couche et d'interface :

$$\begin{aligned}
 & \delta L(N_{11}^i, N_{22}^i, N_{12}^i, M_{11}^i, M_{22}^i, M_{12}^i, Q_1^i, Q_2^i, \underbrace{\tau_1^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\tau_2^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\nu^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i, \lambda_4^i, \lambda_5^i) \\
 & \delta N_{11}^i, \delta N_{22}^i, \delta N_{12}^i, \delta M_{11}^i, \delta M_{22}^i, \delta M_{12}^i, \delta Q_1^i, \delta Q_2^i, \underbrace{\delta \tau_1^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\delta \tau_2^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\delta \nu^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \delta \lambda_1^i, \delta \lambda_2^i, \delta \lambda_3^i, \delta \lambda_4^i, \delta \lambda_5^i) \\
 & = - \int_{\omega} \delta w dS + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[- (\lambda_{1,1}^i \delta N_{11}^i + \lambda_{1,2}^i \delta N_{12}^i) + (\delta \tau_1^{i,i+1} - \delta \tau_1^{i-1,i}) \lambda_1^i \right. \\
 & - (\lambda_{2,2}^i \delta N_{22}^i + \lambda_{2,1}^i \delta N_{12}^i) + (\delta \tau_2^{i,i+1} - \delta \tau_2^{i-1,i}) \lambda_2^i - (\lambda_{3,1}^i \delta M_{11}^i + \lambda_{3,2}^i \delta M_{12}^i) - \lambda_3^i \delta Q_1^i \\
 & + \frac{e^i}{2} (\delta \tau_1^{i,i+1} + \delta \tau_1^{i-1,i}) \lambda_3^i - (\lambda_{4,2}^i \delta M_{22}^i + \lambda_{4,1}^i \delta M_{12}^i) - \lambda_4^i \delta Q_2^i + \frac{e^i}{2} (\delta \tau_2^{i,i+1} + \delta \tau_2^{i-1,i}) \lambda_4^i \\
 & - (\lambda_{5,1}^i \delta Q_1^i + \lambda_{5,2}^i \delta Q_2^i) + (\delta \nu^{i,i+1} - \delta \nu^{i-1,i}) \lambda_5^i \left. \right] dS + \sum_{i=1}^n \int_{\partial \omega_U^i} \left[(\delta N_{11}^i n_1 + \delta N_{12}^i n_2) \lambda_1^i \right. \\
 & + (\delta N_{22}^i n_2 + \delta N_{12}^i n_1) \lambda_2^i - (\delta M_{11}^i n_1 + \delta M_{12}^i n_2) \lambda_3^i - (\delta M_{22}^i n_y + \delta M_{12}^i n_x) \lambda_4^i \\
 & \left. + (\delta Q_1^i n_1 + \delta Q_2^i n_2) \lambda_5^i \right] dl
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

La stationnarité de δL par rapport aux efforts généralisés permet dans un premier temps de déduire les relations à l'intérieur de ω entre multiplicateurs de Lagrange et les déformations généralisées associés aux efforts à travers la loi de comportement du M4-5n obtenue à partir des dérivées de la densité d'énergie élastique w (Eq. 4.15) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\delta L}{\delta N_{11}^i} = 0 \Rightarrow -\frac{\delta w}{\delta N_{11}^i} - \lambda_{1,1}^i = 0 \Rightarrow \varepsilon_{11}^i = -\lambda_{1,1}^i \\
 \frac{\delta L}{\delta N_{22}^i} = 0 \Rightarrow -\frac{\delta w}{\delta N_{22}^i} - \lambda_{2,2}^i = 0 \Rightarrow \varepsilon_{22}^i = -\lambda_{2,2}^i \\
 \frac{\delta L}{\delta N_{12}^i} = 0 \Rightarrow -\frac{\delta w}{\delta N_{12}^i} - \lambda_{1,2}^i - \lambda_{2,1}^i = 0 \Rightarrow 2\varepsilon_{12}^i = -(\lambda_{1,2}^i + \lambda_{2,1}^i) \\
 \frac{\delta L}{\delta M_{11}^i} = 0 \Rightarrow -\frac{\delta w}{\delta M_{11}^i} - \lambda_{3,1}^i = 0 \Rightarrow \chi_{11}^i = -\lambda_{3,1}^i \\
 \frac{\delta L}{\delta M_{22}^i} = 0 \Rightarrow -\frac{\delta w}{\delta M_{22}^i} - \lambda_{4,2}^i = 0 \Rightarrow \chi_{22}^i = -\lambda_{4,2}^i \\
 \frac{\delta L}{\delta M_{12}^i} = 0 \Rightarrow -\frac{\delta w}{\delta M_{12}^i} - \lambda_{4,1}^i - \lambda_{3,2}^i = 0 \Rightarrow 2\chi_{12}^i = -(\lambda_{3,2}^i + \lambda_{4,1}^i) \\
 \frac{\delta L}{\delta Q_1^i} = 0 \Rightarrow -\frac{\delta w}{\delta Q_1^i} - \lambda_{5,1}^i - \lambda_3^i = 0 \Rightarrow d_1^i = -(\lambda_{5,1}^i + \lambda_3^i) \\
 \frac{\delta L}{\delta Q_2^i} = 0 \Rightarrow -\frac{\delta w}{\delta Q_2^i} - \lambda_{5,2}^i - \lambda_4^i = 0 \Rightarrow d_2^i = -(\lambda_{5,2}^i + \lambda_4^i) \\
 \frac{\delta L}{\delta \tau_1^{i,i+1}} = 0 \Rightarrow -\frac{\delta w}{\delta \tau_1^{i,i+1}} - \lambda_1^{i+1} + \lambda_1^i - \frac{e^{i+1}}{2} \lambda_3^{i+1} - \frac{e^i}{2} \lambda_3^i = 0 \Rightarrow D_1^{i,i+1} = -\lambda_1^{i+1} + \lambda_1^i - \frac{e^{i+1}}{2} \lambda_3^{i+1} - \frac{e^i}{2} \lambda_3^i \\
 \frac{\delta L}{\delta \tau_2^{i,i+1}} = 0 \Rightarrow -\frac{\delta w}{\delta \tau_2^{i,i+1}} - \lambda_2^{i+1} + \lambda_2^i - \frac{e^{i+1}}{2} \lambda_4^{i+1} - \frac{e^i}{2} \lambda_4^i = 0 \Rightarrow D_2^{i,i+1} = -\lambda_2^{i+1} + \lambda_2^i - \frac{e^{i+1}}{2} \lambda_4^{i+1} - \frac{e^i}{2} \lambda_4^i \\
 \frac{\delta L}{\delta \nu^{i,i+1}} = 0 \Rightarrow -\frac{\delta w}{\delta \nu^{i,i+1}} - \lambda_5^{i+1} + \lambda_5^i = 0 \Rightarrow D_3^{i,i+1} = -\lambda_5^{i+1} + \lambda_5^i
 \end{array} \right. \tag{4.27}$$

Dans un second temps, la variation des valeurs de champs d'efforts sur la frontière $\partial\omega_U^i$ permet d'obtenir les conditions limites sur les λ^i , en l'occurrence nulles, sur cette frontière.

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta N_{11}^i} = 0 \Rightarrow \lambda_1^i = 0 & , & \frac{\delta L}{\delta N_{22}^i} = 0 \Rightarrow \lambda_2^i = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta M_{11}^i} = 0 \Rightarrow \lambda_3^i = 0 & , & \frac{\delta L}{\delta M_{22}^i} = 0 \Rightarrow \lambda_4^i = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta Q_1^i} = \frac{\delta L}{\delta Q_2^i} = 0 \Rightarrow \lambda_5^i = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Identification des multiplicateurs de Lagrange

On constate alors qu'en posant :

$$\begin{cases} \lambda_1^i = -U_1^i & , & \lambda_2^i = -U_2^i \\ \lambda_3^i = -\phi_1^i & , & \lambda_4^i = -\phi_2^i & , & \lambda_5^i = -U_3^i \end{cases} \quad (4.29)$$

l'ensemble des équations retrouvées précédemment (équilibre, comportement, compatibilité cinématique et conditions limites sur $\partial\omega_U^i$ et $\partial\omega_T^i$ coïncident avec les équations de la formulation forte. Ceci permet de conclure sur l'équivalence entre la formulation forte et la formulation mixte du M4-5n (sans considération ici des espaces fonctionnels sur lesquels sont définis chacune de ces formulations).

Réécrivons à présent l'expression du Lagrangien L en donnant aux multiplicateurs de Lagrange λ_γ^i leur signification de déplacements généralisés obtenus à partir de l'identification précédente.

$$\begin{aligned} & L(N_{11}^i, N_{22}^i, N_{12}^i, M_{11}^i, M_{22}^i, M_{12}^i, Q_1^i, Q_2^i, \underbrace{\tau_1^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\tau_2^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\nu^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, U_1^i, U_2^i, \phi_1^i, \phi_2^i, U_3^i) \\ &= - \int_\omega w dS + \sum_{i=1}^n \int_\omega \left[(U_{1,1}^i N_{11}^i + U_{1,2}^i N_{12}^i) - (\tau_1^{i,i+1} - \tau_1^{i-1,i}) U_1^i \right. \\ &+ (U_{2,2}^i N_{22}^i + U_{2,1}^i N_{12}^i) - (\tau_2^{i,i+1} - \tau_2^{i-1,i}) U_2^i + (\phi_{1,1}^i M_{11}^i + \phi_{1,2}^i M_{12}^i) - \frac{e^i}{2} (\tau_1^{i,i+1} + \tau_1^{i-1,i}) \phi_1^i \\ &+ (\phi_{2,2}^i M_{22}^i + \phi_{2,1}^i M_{12}^i) - \frac{e^i}{2} (\tau_2^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i}) \phi_2^i + \phi_1^i Q_1^i + \phi_2^i Q_2^i + (U_{3,1}^i Q_1^i + U_{3,2}^i Q_2^i) \\ &\left. - (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) U_3^i \right] dS - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_U^i} \left[(N_{11}^i n_1 + N_{12}^i n_2) U_1^i + (N_{22}^i n_2 + N_{12}^i n_1) U_2^i \right. \\ &\left. + (M_{11}^i n_1 + M_{12}^i n_2) \phi_1^i + (M_{22}^i n_2 + M_{12}^i n_1) \phi_2^i + (Q_1^i n_1 + Q_2^i n_2) U_3^i \right] dl \end{aligned} \quad (4.30)$$

Le Lagrangien L ainsi obtenu est l'équivalent de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner exprimée en champs généralisés (pour les hypothèses considérées dans ce chapitre).

De façon à pouvoir baser nos calculs sur la recherche du point selle de L, il nous reste à exprimer la variation du Lagrangien par rapports à l'ensemble de ses arguments (Eq. 4.31). La résolution EF du

M4-5n repose directement dans FreeFem++ sur la transcription de cette expression (Eq. 4.31) qui est déclarée égale à zéro.

$$\begin{aligned}
 & \delta L(N_{11}^i, N_{22}^i, N_{12}^i, M_{11}^i, M_{22}^i, M_{12}^i, Q_1^i, Q_2^i, \underbrace{\tau_1^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\tau_2^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\nu^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, U_1^i, U_2^i, \phi_1^i, \phi_2^i, U_3^i \\
 & \delta N_{11}^i, \delta N_{22}^i, \delta N_{12}^i, \delta M_{11}^i, \delta M_{22}^i, \delta M_{12}^i, \delta Q_1^i, \delta Q_2^i, \underbrace{\delta \tau_1^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\delta \tau_2^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\delta \nu^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \delta U_1^i, \delta U_2^i, \delta \phi_1^i, \delta \phi_2^i, \delta U_3^i) \\
 & = - \int_{\omega} \delta w dS + \sum_{i=1}^n \int_{\omega} \left[(U_{1,1}^i \delta N_{11}^i + U_{1,2}^i \delta N_{12}^i) + (\delta U_{1,1}^i N_{11}^i + \delta U_{1,2}^i N_{12}^i) \right. \\
 & - (\tau_1^{i,i+1} - \tau_1^{i-1,i}) \delta U_1^i - (\delta \tau_1^{i,i+1} - \delta \tau_1^{i-1,i}) U_1^i + (U_{2,2}^i \delta N_{22}^i + U_{2,1}^i \delta N_{12}^i) + (\delta U_{2,2}^i N_{22}^i + \delta U_{2,1}^i N_{12}^i) \\
 & - (\tau_2^{i,i+1} - \tau_2^{i-1,i}) \delta U_2^i - (\delta \tau_2^{i,i+1} - \delta \tau_2^{i-1,i}) U_2^i + (\phi_{1,1}^i \delta M_{11}^i + \phi_{1,2}^i \delta M_{12}^i) + (\delta \phi_{1,1}^i M_{11}^i + \delta \phi_{1,2}^i M_{12}^i) \\
 & - \frac{e^i}{2} (\tau_1^{i,i+1} + \tau_1^{i-1,i}) \delta \phi_1^i - \frac{e^i}{2} (\delta \tau_1^{i,i+1} + \delta \tau_1^{i-1,i}) \phi_1^i + (\phi_{2,2}^i \delta M_{22}^i + \phi_{2,1}^i \delta M_{12}^i) + (\delta \phi_{2,2}^i M_{22}^i + \delta \phi_{2,1}^i M_{12}^i) \\
 & - \frac{e^i}{2} (\delta \tau_2^{i,i+1} + \delta \tau_2^{i-1,i}) \phi_2^i - \frac{e^i}{2} (\tau_2^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i}) \delta \phi_2^i + \phi_1^i \delta Q_1^i + \delta \phi_1^i Q_1^i + \phi_2^i \delta Q_2^i + \delta \phi_2^i Q_2^i \\
 & + (U_{3,1}^i \delta Q_1^i + U_{3,2}^i \delta Q_2^i) + (\delta U_{3,1}^i Q_1^i + \delta U_{3,2}^i Q_2^i) - (\delta \nu^{i,i+1} - \delta \nu^{i-1,i}) U_3^i - (\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}) \delta U_3^i \left. \right] dS \\
 & - \sum_{i=1}^n \int_{\partial \omega_U^i} \left[(\delta N_{11}^i n_1 + \delta N_{12}^i n_2) U_1^i + (N_{11}^i n_1 + N_{12}^i n_2) \delta U_1^i + (\delta N_{22}^i n_2 + \delta N_{12}^i n_1) U_2^i \right. \\
 & + (N_{22}^i n_2 + N_{12}^i n_1) \delta U_2^i + (\delta M_{11}^i n_1 + \delta M_{12}^i n_2) \phi_1^i + (M_{11}^i n_1 + M_{12}^i n_2) \delta \phi_1^i \\
 & + (\delta M_{22}^i n_2 + \delta M_{12}^i n_1) \phi_2^i + (M_{22}^i n_2 + M_{12}^i n_1) \delta \phi_2^i + (\delta Q_1^i n_1 + \delta Q_2^i n_2) U_3^i + (Q_1^i n_1 + Q_2^i n_2) \delta U_3^i \left. \right] dl \\
 & \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

avec δw :

$$\begin{aligned}
 & \delta w(N_{11}^i, N_{22}^i, N_{12}^i, M_{11}^i, M_{22}^i, M_{12}^i, Q_1^i, Q_2^i, \underbrace{\tau_1^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\tau_2^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\nu^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \delta N_{11}^i, \delta N_{22}^i, \delta N_{12}^i, \delta M_{11}^i, \delta M_{22}^i, \delta M_{12}^i, \\
 & \delta Q_1^i, \delta Q_2^i, \underbrace{\delta \tau_1^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\delta \tau_2^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}, \underbrace{\delta \nu^{i,i+1}}_{i \neq 0, i \neq n}) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{e^i E^i} (N_{11} \delta N_{11}^i + N_{22}^i \delta N_{22}^i + 2N_{12}^i \delta N_{12}^i (1 + v^i) \right. \\
 & - v^i (\delta N_{11}^i N_{22}^i + N_{11}^i \delta N_{22}^i)) + \frac{12}{e^{i3} E^i} (M_{11}^i \delta M_{11}^i + M_{22}^i \delta M_{22}^i + 2M_{12}^i \delta M_{12}^i (1 + v^i) \\
 & - v^i (\delta M_{11}^i M_{22}^i + \delta M_{22}^i M_{11}^i)) + \frac{12(1 + v^i)}{5e^i E^i} (Q_1^i \delta Q_1^i + Q_2^i \delta Q_2^i) + \frac{13e^i}{35E^i} (\nu^{i-1,i} \delta \nu^{i-1,i} + \nu^{i,i+1} \delta \nu^{i,i+1}) \\
 & + \frac{9e^i}{35E^i} (\delta \nu^{i-1,i} \nu^{i,i+1} + \nu^{i-1,i} \delta \nu^{i,i+1}) + \frac{4e^i(1 + v^i)}{15E^i} (\tau_1^{i-1,i} \delta \tau_1^{i-1,i} + \tau_1^{i,i+1} \delta \tau_1^{i,i+1} \\
 & + \tau_2^{i-1,i} \delta \tau_2^{i-1,i} + \tau_2^{i,i+1} \delta \tau_2^{i,i+1}) - \frac{e^i(1 + v^i)}{15E^i} (\delta \tau_1^{i-1,i} \tau_1^{i,i+1} + \tau_1^{i-1,i} \delta \tau_1^{i,i+1} + \delta \tau_2^{i-1,i} \tau_2^{i,i+1} + \tau_2^{i-1,i} \delta \tau_2^{i,i+1}) \\
 & \left. - \frac{(1 + v^i)}{5E^i} (\delta Q_1^i (\tau_1^{i-1,i} + \tau_1^{i,i+1}) + Q_1^i (\delta \tau_1^{i-1,i} + \delta \tau_1^{i,i+1}) + \delta Q_2^i (\tau_2^{i-1,i} + \tau_2^{i,i+1}) + Q_2^i (\delta \tau_2^{i-1,i} + \delta \tau_2^{i,i+1})) \right] \\
 & \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

Dans l'écriture $\delta L = 0$, les champs inconnus de contraintes et de déplacements généralisés en arguments de δL sont les champs solutions.

4.3 Disrétisation EF de la formulation mixte

La résolution numérique des formulations mixtes obtenues ci-avant peut être effectuée par la méthode des éléments finis basée sur la discrétisation du domaine ω et des champs généralisés inconnus. Cette partie de la résolution est effectuée automatiquement dans FreeFem++ sur la base de la donnée d'un maillage (constitué d'éléments triangulaires dans FreeFem++) et des espaces d'interpolation associés, de dimensions finies, des divers champs. La technique de discrétisation du problème à partir de la forme faible du problème est classique et non rappelée en détail ici. Les champs intervenant sans opération de dérivation (en l'occurrence les champs de contraintes généralisées notés collectivement ici Σ) doivent être choisis *a minima* de type C^{-1} (constant par morceau). Les champs faisant intervenir des dérivées spatiales d'ordre 1, en l'occurrence les champs de déplacements généralisés (notés collectivement ici U), doivent être choisis *a minima* C^0 continus par morceaux. On est ainsi conduit sur chaque élément de maillage à la construction de matrices de rigidité élémentaires, qui du fait de la décomposition du M4-5n en couches, présentent une structure bande. Les couches i et $i+2$ sont sans interaction directe. Les intégrales de la formulation continue se traduisent par des sommes de ces matrices (assemblage).

Compte tenu de la structure des Lagrangiens considérés ici, se présentant comme la somme d'une forme quadratique en " Σ, Σ " et " Σ, U " et d'une forme linéaire en U , on parvient au système linéaire de la forme suivante rencontrée classiquement en formulation mixte (Zienkiewicz, 1973), (Batoz, 1995), (Bathe, 2006) :

$$\begin{bmatrix} -[K_{\Sigma\Sigma}] & [K_{\Sigma U}] \\ [K_{U\Sigma}] & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\Sigma\} \\ \{U\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{F_{\Sigma}\} \\ \{F_U\} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

avec pour les éléments finis usuels :

$\{\Sigma\}$ = vecteur des valeurs nodales des champs de contraintes généralisées

$\{U\}$ = vecteur des valeurs nodales des champs de déplacements généralisés

$[K_{\Sigma\Sigma}]$: matrice (de souplesse) symétrique définie positive, $[K_{U\Sigma}] = [K_{\Sigma U}^T]$

$\{F_{\Sigma}\}$ = vecteur second membre relié aux efforts imposés en surface de multicouche (à travers l'expression de l'énergie élastique) et relié aux déplacements imposés sur $\partial\omega_U$

$\{F_U\}$ = vecteur second membre relié aux efforts imposés en surface de multicouche (à travers les équations d'équilibre) ou sur le contour $\partial\omega_T$.

Ce type de système avec des zéros sur une partie de la diagonale est toutefois connu comme pouvant conduire à un système sur-déterminé ou sous-déterminé en fonction de la dimension des espaces d'interpolation de $\{\Sigma\}$ ($\{\delta\Sigma\}$) et $\{U\}$ ($\{\delta U\}$) (Zienkiewicz et al., 2005).

Comme on peut s'y attendre, une première condition pour éviter la sous-détermination est de choisir

la dimension de l'espace des multiplicateurs de Lagrange (en l'occurrence dimension n_U de $\{U\}$) qui contraignent le problème plus petite que celle de l'espace des grandeurs primales du problème (en l'occurrence dimension n_Σ de $\{\Sigma\}$) : $n_U < n_\Sigma$.

La démonstration est effectuée dans (Zienkiewicz and Taylor, 2000) en considérant la forme pénalisée (α est un scalaire "grand") et en se plaçant dans le cas d'un problème où $\{F_U\} = 0$ (cas sans efforts imposés et à déplacements imposés non nuls) :

$$\begin{bmatrix} [K_{\Sigma\Sigma}] & [K_{\Sigma U}] \\ [K_{\Sigma U}^T] & -\frac{1}{\alpha}[I] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\Sigma\} \\ \{U\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{F_\Sigma\} \\ \{F_U\} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Les contraintes $\{\Sigma\}$ s'écrivent donc

$$([K_{\Sigma\Sigma}] + \alpha[K_{\Sigma U}][K_{\Sigma U}^T])\{\Sigma\} = \{F_\Sigma\} \quad (4.35)$$

Lorsque $\alpha \rightarrow \infty$, l'équation $[K_{\Sigma U}][K_{\Sigma U}^T]\{\Sigma\} = [K_{\Sigma U}]\{F_U\}$ doit pouvoir conduire à une solution non triviale. Ceci n'est possible que si $[K_{\Sigma U}][K_{\Sigma U}^T]$ est singulière, ce qui est le cas seulement quand $n_\Sigma \geq n_U$.

Il reste ensuite à vérifier que la solution est unique. Formellement, le système 4.34 conduit pour $\{U\}$ à la solution :

$$([K_{\Sigma U}]^T[K_{\Sigma\Sigma}]^{-1}[K_{\Sigma U}])\{U\} = -\{F_U\} + [K_{\Sigma U}]^T[K_{\Sigma\Sigma}]^{-1}\{F_\Sigma\} \quad (4.36)$$

La matrice $[K_{\Sigma U}]^T[K_{\Sigma\Sigma}]^{-1}[K_{\Sigma U}]$ doit être non singulière ou n'admettre pour noyau que la solution $\{U = 0\}$. Or :

$$\begin{aligned} ([K_{\Sigma U}]^T[K_{\Sigma\Sigma}]^{-1}[K_{\Sigma U}])\{U\} = 0 &\Rightarrow \{U^T\}([K_{\Sigma U}]^T[K_{\Sigma\Sigma}]^{-1}[K_{\Sigma U}])\{U\} = 0 \\ &\Rightarrow [K_{\Sigma U}]\{U\} = 0 \quad \text{compte tenu du caractère défini positif de } [K_{\Sigma\Sigma}] \end{aligned} \quad (4.37)$$

On obtient donc la seconde condition qui s'exprime à travers l'implication $[K_{\Sigma U}]\{U\} = 0$ ou sa contraposée.

Ces 2 conditions dites condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Breezi (*LBB*) sont nécessaires et suffisantes pour assurer l'existence et l'unicité des problèmes de formulation mixte.

La première condition est facile à réaliser *a priori*, la seconde est vérifiée *a posteriori* par le bon déroulement de la résolution du système linéaire (absence de messages d'erreur) et l'obtention de la solution.

Nous avons ainsi implémenté deux choix d'espaces fonctionnels dans FreeFem++. Le premier repose sur des polynômes de Lagrange de degrés relativement élevés dont nous avons fait dépendre l'ordre en fonction de la nature des champs. En l'occurrence, nous avons choisi les ordres et dimensions d'espace suivantes ($dim = \frac{(ordre + 1)(ordre + 2)}{2}$) :

$$\begin{aligned}
 ordre(P_{N_{\alpha\beta}^i}) &= 3, & dim(P_{N_{\alpha\beta}^i}) &= 10 \\
 ordre(P_{M_{\alpha\beta}^i}) &= 2, & dim(P_{M_{\alpha\beta}^i}) &= 6 \\
 ordre(P_{Q_{\alpha}^i}) &= 3, & dim(P_{Q_{\alpha}^i}) &= 10 \\
 ordre(P_{\tau_{\alpha}^{i,i+1}}) &= 2, & dim(P_{\tau_{\alpha}^{i,i+1}}) &= 6 \\
 ordre(P_{\nu^{i,i+1}}) &= 2, & dim(P_{\nu^{i,i+1}}) &= 6 \\
 ordre(P_{U_{\alpha}^i}) &= 3, & dim(P_{U_{\alpha}^i}) &= 10 \\
 ordre(P_{\phi_{\alpha}^i}) &= 1, & dim(P_{\phi_{\alpha}^i}) &= 3 \\
 ordre(P_{U_3^i}) &= 2, & dim(P_{U_3^i}) &= 6
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

La figure 4.1 représente l'élément fini triangulaire correspondant.

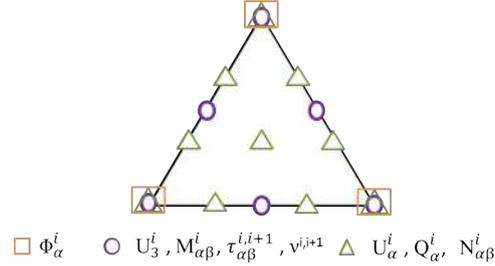


FIGURE 4.1 – Élément fini mixte M4-5n en 2D pour les problèmes en 3D avec des noeuds multiples reliés à l'ordre d'interpolation de chaque champ mécanique et de degré de liberté multiples relié au nombres de couches

A titre d'exemple, pour une plaque encastree sur son contour et soumise à des efforts imposés ou nuls sur ses deux faces, le nombre de degré de liberté de contraintes de flexion ($M_{\alpha\beta}, Q_{\alpha}$) et des déplacements associés (U_3, ϕ_{α}) sont respectivement égaux à $n_{\Sigma} = 38$ et $n_U = 12$ et respectent donc bien la condition $n_U < n_{\Sigma}$.

La taille de la matrice de rigidité élémentaire de cet élément pour n couches de M4-5nW est égale à $118n-12 \times 118n-12$ (ex : $460 \times 460 = 211600$ termes pour un quadricouche!, mais heureusement avec beaucoup de zéros du fait de la structure bande par couche).

Le nombre de degrés de libertés devient donc rapidement important pour un maillage constitué de tels éléments. Par contre leur haut degré de précision permet de travailler sur des maillages à peu

d'éléments.

L'autre choix d'espace d'interpolation que nous avons fait à partir de la littérature est celui des éléments P1b pour les champs Σ et P1 pour les champs U .

Les éléments P1b comportent en sus des degrés de liberté de P1, un degré de liberté situé au barycentre de l'élément auquel est associé la fonction d'interpolation bulle N_b définie par :

$$N_b(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha\beta\gamma}{27} \quad (4.39)$$

où α, β, γ sont les coordonnées barycentriques du point considéré sur l'élément fini triangulaire (Figure). La fonction vaut 1 au barycentre et 0 sur les bords du triangle.

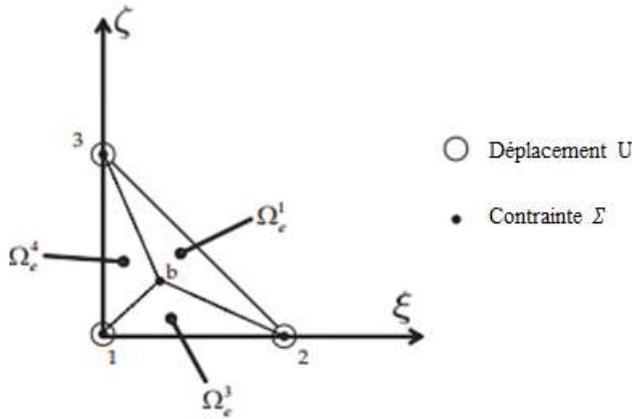


FIGURE 4.2 – Élément P1/P1b dans le repère de référence (ξ, ζ) pour un élément triangle (Drapier and Fortunier, 2015)

Les composantes d'effort notées ci-dessous Σ sont alors interpolées sur l'élément fini triangulaire par :

$$\Sigma(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y)\Sigma_i + N_b(\alpha, \beta, \gamma)\left(\Sigma_b - \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3}{3}\right) \quad (4.40)$$

où les N_i sont les fonctions de forme de l'élément P1 et Σ_b sont les valeurs de Σ au barycentre. On n'a plus pour N_b égalité entre la valeur nodale associée $\left(\frac{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3}{3}\right)$ et la valeur du champ. Le choix de l'espace P1b pour Σ au lieu de P1 permet de satisfaire la double condition *LBB*.

La matrice de rigidité élémentaire de l'élément fini triangulaire pour le M4-5nW dans ce cas est de dimension $59n-8 \times 59n-8$, ce qui fait un ratio du nombre de termes de l'ordre de 1/4 par rapport à l'élément précédent (ex : 51984 termes pour un quadricouche). Cette taille peut être ramenée à celle du P1 par condensation statique du nœud intérieur ($48n-6 \times 48n-6$) mais avec perte de la structure bande.

4.4 Aménagement de la formulation en vue de la modélisation EF des chaussées

4.4.1 Prise en compte des ressorts du M4-5nW

Nous avons vu dans les chapitres précédents que la modélisation du sol faisait intervenir des appuis de Winkler. La prise en compte de cette condition introduit deux modifications : le champ d'effort normal $\nu^{n,n+1}$ sous la dernière couche redevient une inconnue du problème et est pris en compte à travers la densité d'énergie élastique de contrainte $w_{Winkler}$

$$w_{Winkler} = \frac{1}{2} \frac{(\nu^{n,n+1})^2}{k} \quad (4.41)$$

qui s'ajoute à la densité d'énergie élastique w .

4.4.2 Prise en compte des conditions aux limites en efforts par pénalisation

La prise en compte de ces conditions a été faite précédemment par multiplicateurs de Lagrange $\tilde{\mu}^i$ en considérant ces derniers égaux (au signe près) aux valeurs des $\tilde{\lambda}^i$ sur le bord $\partial\omega_T^i$.

Néanmoins, après discrétisation du problème, ce lien entre valeurs volumiques et valeurs aux bords des multiplicateurs de Lagrange ne permet plus d'imposer cette condition rigoureusement. Afin de forcer ces conditions dans le cas discret, on pénalise en sus la fonctionnelle L (Lagrangien augmenté) par le terme complémentaire :

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_T^i} [\Lambda_N^i (N_{\alpha\beta}^i n_\beta N_{\alpha\gamma}^i n_\gamma) + \Lambda_M^i (M_{\alpha\beta}^i n_\beta M_{\alpha\gamma}^i n_\gamma) + \Lambda_Q^i (Q_\alpha^i n_\alpha Q_\beta^i n_\beta)] dl \quad (4.42)$$

où les Λ_N^i , Λ_M^i , Λ_Q^i sont des coefficients de pénalité arbitraires, positifs et "grands" choisis a priori en fonction des propriétés mécaniques et de l'épaisseur de couches.

4.4.3 Adimensionnalisation des champs mécaniques

Afin d'éviter les problèmes de mauvais conditionnement des matrices liés à des propriétés fortement différenciées entre couches, nous réalisons une étape d'adimensionnalisation de tous les champs mécaniques du problème. Nous notons \overline{U}_α^i , $\overline{\phi}_\alpha^i$, \overline{U}_3^i , $\overline{N}_{\alpha\beta}^i$, $\overline{M}_{\alpha\beta}^i$, \overline{Q}_α^i , $\overline{\tau}_\alpha^{i,i+1}$, $\overline{\nu}^{i,i+1}$ les champs adimensionnels exprimés sous la forme suivante (avec $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$) :

$$\overline{U}_\alpha^i = \frac{U_\alpha^i}{e^i}, \quad \overline{\phi}_\alpha^i = \phi_\alpha^i, \quad \overline{U}_3^i = \frac{U_3^i}{e^i} \quad (4.43)$$

$$\overline{N}_{\alpha\beta}^i = \frac{N_{\alpha\beta}^i}{e^i E^i}, \quad \overline{M}_{\alpha\beta}^i = \frac{M_{\alpha\beta}^i}{e^{i2} E^i}, \quad \overline{Q}_\alpha^i = \frac{Q_\alpha^i}{e^i E^i}, \quad \overline{\tau}_\alpha^{i,i+1} = \frac{\tau_\alpha^{i,i+1}}{E^i}, \quad \overline{\nu}^{i,i+1} = \frac{\nu^{i,i+1}}{E^i} \quad (4.44)$$

Le problème est résolu à partir de ces quantités substituées dans le Lagrangien. Les résultats sont ré-exprimés quant à eux en fin de calcul avec leurs vraies dimensions. Cette adimensionnalisation permet également de n'introduire qu'un seul coefficient de pénalisation indépendant des couches et des

quantités ($\Lambda = 10^5$).

Dans la suite, afin d'alléger les expressions analytiques, nous gardons les notations précédentes.

4.4.4 Prise en compte de fissures verticales ou de décollements d'interfaces

Nous nous intéressons ici à deux types de discontinuités (à épaisseurs nulles) : discontinuités inscrites dans des plans verticaux (joints de construction naturels ou fissures) d'une part, discontinuités d'interfaces d'autre part (disposition constructive, décollements partiels par endommagement des interfaces entre couches).

Cas de fissures verticales

Commençons par considérer le cas d'une fissure verticale s'étendant sur toute la hauteur d'une ou plusieurs couches. Celle-ci nécessite dans notre approche d'introduire un plan vertical dans le maillage coïncidant avec la fissure et de doubler l'ensemble des nœuds contenus dans ce plan. Pour les couches fissurées, on est ramené au cas des bords libres traités dans le cas général par le terme de pénalisation (Eq. 4.42). Sur les couches non fissurées, les déplacements et les vecteurs contraintes généralisées sont rendus continus par pénalisation deux à deux des champs en vis à vis à l'aide de termes additionnels dans l'expression de L , de la forme :

$$-\frac{\Lambda}{2} \int_{\Gamma_f} \sum_{i=1}^{n_{nf}} [(U_\alpha^{i+} - U_\alpha^{i-})(U_\alpha^{i+} - U_\alpha^{i-}) + (\phi_\alpha^{i+} - \phi_\alpha^{i-})(\phi_\alpha^{i+} - \phi_\alpha^{i-})] dl \quad (4.45)$$

Avec n_{nf} est le nombre de couches non fissurées

ou de la forme

$$-\frac{\Lambda}{2} \sum_{i=1}^{n_{nf}} \int_{\Gamma_f} [[N_{\alpha\beta}^i]] n_\beta [[N_{\alpha\gamma}^i]] n_\gamma + [[M_{\alpha\beta}^i]] n_\beta [[M_{\alpha\gamma}^i]] n_\gamma + [[Q_\alpha^i]] n_\alpha [[Q_\beta^i]] n_\beta dl \quad (4.46)$$

où Γ_f est la trace du plan vertical de fissure dans le plan (O,x,y) et où $(.)^+$ et $(.)^-$ désignent les quantités de part et d'autre de Γ_f et où $[[.]]$ désigne le saut $(.)^+ - (.)^-$.

Le dédoublement des degrés de liberté d'interface permet de rendre compte des discontinuités existantes sur les champs d'interface $\tau_\alpha^{i,i+1}$ et $\nu^{i,i+1}$ situés en extrémités de fissure (cf Figure 3.16, 3.17).

Dans le cas plus général de fissures verticales dont la pointe (ou plus précisément l'arête) ne coïncide pas avec une interface initiale du multicouche, on se ramène au cas précédent en découpant la couche où se situe cette arête en deux sous-couches de propriétés mécaniques identiques à la couche en question. Éventuellement ce découpage peut introduire des interfaces non horizontales qui peuvent être traitées en faisant varier l'épaisseur des couches $e^i(x,y)$ dans la formulation Lagrangienne.

Cas d'un décollement d'interface

Notons D la projection sur le plan (x,y) du domaine décollé. Supposons que les faces décollées restent en contact mais glissent sans frottement. Les contraintes d'interface de cisaillement $\tau_\alpha^{i,i+1}$ sont nulles et peuvent être imposées tel quel par pénalisation pour l'interface $i, i + 1$ à l'aide du terme :

$$-\frac{\Lambda}{2} \int_D \tau_\alpha^{i,i+1} \tau_\alpha^{i,i+1} dS \quad (4.47)$$

La condition de continuité des déplacements verticaux à l'interface est quant à elle assurée naturellement par construction du M4-5n lorsque aucune condition particulière n'est introduite sur l'effort normal d'interface $\nu^{i,i+1}$. Il est toutefois nécessaire pour tenir compte de la discontinuité de $\tau_\alpha^{i,i+1}$ sur la frontière ∂D de doubler les nœuds situés sur celle-ci en réimposant la continuité de tous les autres champs par pénalisation "deux à deux" en s'inspirant de l'Eq. 4.46.

Dans les chapitres 5 et 6 de validation et d'application des développements EF, nous nous limitons au cas de fissures verticales situées dans les plans de symétrie des maillages. Ceci dispense des procédures par pénalisation évoquées ci-dessus et ramène le problème à la prise en compte de conditions limites nulles en déplacement ou en contraintes traitées au début de ce chapitre (hormis le fait que l'on peut avoir sur une même couche à la fois des conditions limites en déplacements et en contraintes).

4.4.5 Réduction des modèles par symétrie et antisymétrie

L'utilisation des conditions de symétrie et d'antisymétrie est intéressante non seulement pour diminuer la taille du domaine ω et conséquemment le nombre d'éléments des maillages mais aussi pour pouvoir prendre en compte des plans de fissures verticaux en conditions limites sur $\partial\omega$.

Le schéma de la Figure 4.3 montre en 1D la décomposition d'un chargement positionné de façon quelconque par rapport à un axe (Oz) donné (ex : plan avec discontinuité) en deux composantes symétrique et antisymétrique par rapport à cet axe. Ceci permet de réduire de moitié le domaine ω à condition de réaliser sur celui-ci deux calculs en modifiant les conditions limites.

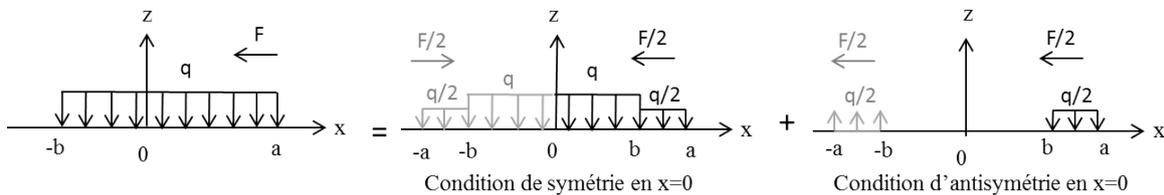


FIGURE 4.3 – Différents cas de charge roulante (Nasser et al., 2016a)

Le chargement symétrique s'obtient en imposant sur l'axe (Oz) des couches non fissurées des valeurs nulles pour les champs suivants : U_1^i , ϕ_1^i et Q_1^i . Il ne faut donc garder dans L sur cette frontière que

ces degrés de liberté de déplacement et imposer la condition sur Q_1^i par pénalisation.

Le chargement antisymétrique s'obtient en imposant sur l'axe (Oz) des couches non fissurées des valeurs nulles pour les champs suivants : U_3^i , N_{11}^i et M_{11}^i . Il ne faut donc garder dans L sur cette frontière que ces degrés de liberté de déplacement et imposer la condition sur N_{11}^i et M_{11}^i par pénalisation.

Dans les deux cas de chargement, les couches fissurées se comportent comme des bords libres.

En 3D, cette technique est applicable suivant les deux plans (O,x,z) et (O,y,z), ce qui permet éventuellement de réduire au quart le domaine ω .

4.5 Implémentation dans FreeFem++

Après le calcul du Lagrangien L (Eq. 4.30) et de sa variation par rapport à tous les champs généralisés (Eq. 4.31), nous avons développé un algorithme pour la résolution de δL utilisant la méthode des éléments finis et nous l'avons implémenté dans FreeFem++.

FreeFem++ est un logiciel libre permettant de résoudre numériquement des équations différentielles par éléments finis (Hecht, 2011), (Grivet, 2013). Il possède son propre langage de script, inspiré du C++, pour décrire le type de problème différentiel, les équations aux dérivées partielles et les conditions initiales et aux limites. Il peut ainsi résoudre des problèmes dits multi-physiques, présentant des non-linéarités, en bi- comme en tri-dimensionnel, sur des maillages pouvant aller au million de nœuds (ordinateur de calcul standard) jusqu'à quelques milliards de nœuds (gros système multi-processeurs dédié au calcul). Il est développé au Laboratoire Jacques-Louis Lions de l'Université Pierre et Marie Curie (Hecht, 2011), (Hecht and Pironneau, 2013) porté sous Windows, Unix (Linux) et MacOS.

Pour résoudre l'Eq. 4.31, il faut développer un script qui inclut la définition de la géométrie du problème étudié (à partir de la définition des frontières) ainsi que l'espace d'approximation et le type des éléments finis. Le maillage peut être effectué à partir de fonctions propres à FreeFem++ ou être importé dans le cas de géométrie complexe (ex : utilisation du mailleur GMSH). On introduit ensuite le problème variationnel à résoudre à l'aide d'opérateurs dédiés au calcul des diverses intégrales. FreeFem++ possède également des fonctions de post-traitement et de visualisation graphique (courbes d'isovaleurs et des champs de vecteurs). Mais il est possible aussi d'introduire dans le script toute instruction en C++ pour réaliser des opérations complémentaires nécessaires au déroulement du calcul ou à son exploitation (ex : développement d'algorithmiques avec boucles de calcul, instructions de post-traitement).

Comme déjà mentionné, FreeFem++ exécute implicitement toutes les étapes habituelles requises par la méthode des éléments finis (calcul des matrices élémentaires, assemblage, résolution du système global : méthode multifrontale Gauss LU par défaut pour matrice creuse). Au final, la résolution du

M4-5nW par le script FreeFem++ ne demande de la part du développeur que relativement peu de programmation et de recherche d'erreurs.

Le domaine à mailler pour le M4-5n est à décomposer préalablement en sous domaines pour la prise en compte exacte des chargements de pression apportés par les roues. Les instructions principales à fournir pour la constitution du script relatif au M4-5nW se présentent dans l'ordre suivant.

- Définition géométrique des frontières : L'ensemble des frontières Γ_j du problème est décrit analytiquement à partir des équations paramétriques $x(t)$, $y(t)$ des Γ_j en moyen de la commande "border" (Eq. 4.48). Les frontières peuvent être désignées soit par leur nom soit par leur étiquette (label) ou encore par leur numéro interne. Le mot clé "label" permet de définir un sous-ensemble de frontières possédant des propriétés identiques (ex : même traitement des conditions limites).

$$\text{border} = \text{name}(t = \text{debut}, \text{fin}) \{x = x(t); y = y(t); \text{label} = \text{num} - \text{label}\}; \quad (4.48)$$

- Définition du maillage : Le maillage de chaque sous-domaine est effectué par la commande "buildmesh" à partir de la donnée de contours fermés. Chaque frontière Γ_j est affectée d'une densité définissant son découpage en nœuds permettant de régler la finesse des maillages. L'instruction "buildmesh" se présente sous la forme suivante (Eq. 4.49) :

$$\text{mesh}(\text{nom} - \text{maillage}) = \text{buildmesh}(\text{name1}(n1) + \dots + \text{namek}(nk)); \quad (4.49)$$

où $n1, \dots, nk$ représentent le nombre d'éléments par bord.

- Résolution de la formulation faible : On définit d'abord les espaces d'interpolation de chaque champ puis le problème variationnel.

- La définition des espaces d'interpolation se fait par la commande "fespace" : $\text{fespace}(\text{nom} - \text{espace}(\text{nom} - \text{maillage}, \text{type} - \text{elements} - \text{finis}))$; Par exemple les mots-clés "P1", "P1b" définissent les types éléments finis linéaires sans et avec fonction bulle utilisés dans nos applications. Une variable définie par son nom et son espace d'interpolation est alors affectée à chaque champ inconnu et virtuel du problème (var , δvar).

- Le problème variationnel est déclaré en utilisant la commande "problem" :

$$\text{problem} - \text{name}([\text{var1}, \dots, \text{varm}], [\delta\text{var1}, \dots, \delta\text{varm}]) = \delta L; \quad (4.50)$$

où on trouve entre les premiers crochets les champs inconnus, entre les seconds crochets les champs virtuels et où δL résulte directement de l'Eq. 4.31.

Les intégrales de surface sont déclarées à l'aide de la commande "int2d(nom-maillage)(intégrande)" en distinguant par des instructions distinctes les contributions à la matrice de rigidité et au

vecteur second membre.

Les intégrales de bords sont déclarées à l'aide de la commande "int1d(nom-maillage, num-label)(intégrande)" (la donnée du domaine "nom-maillage" donne accès aux fonctions d'interpolation utilisées sur le bord "num-label" ; elles sont égales à la trace sur les contours d'éléments des fonctions d'interpolation surfacique).

On rappelle que termes représentant les conditions limites au dessus ($\tau_1^{0,1}$, $\tau_2^{0,1}$ et $\nu^{0,1}$) et au dessous ($\tau_1^{n,n+1}$, $\tau_2^{n,n+1}$) du multicouche (n couches) ne doivent pas être considérés comme variables du problèmes, ils sont remplacés par leur valeur imposées (= 0 ou $q_c(x, y)$ pour $\nu^{0,1}$).

Pour écrire une dérivée par rapport à x d'une variable (var1 par exemple), on utilise le mot-clé "dx(var1)". De même, pour écrire la dérivée de var1 par rapport à y, on utilise le mot clé "dy(var1)".

Le problème résolu correspond implicitement à l'équation $\delta L = 0$.

- Calculs complémentaires de post-traitement : valeurs de champs à toute cote, énergie élastique emmagasinée dans le M4-5n.

Les vecteurs de valeurs nodales obtenues en fin de calcul peuvent être utilisés pour calculer des grandeurs en tout point (x,y,z) du multicouche à partir des équations du chapitre 2. En vue de l'application du chapitre 6, nous avons en particulier implémenté le calcul des déformations 3D au niveau des jauges implantées dans la structure de chaussée considérée pour comparaison entre modèle théorique M4-5nW et mesures. Les valeurs en x,y des champs généralisés nécessaires à ces calculs s'obtiennent directement dans FreeFem++ comme valeurs de champs sans besoin de retourner aux fonctions d'interpolation.

Nous avons également implémenté le calcul de l'énergie élastique emmagasinée dans l'ensemble du M4-5n, ceci à la fois à des fins de comparaison avec la solution analytique du chapitre 5 et en vue de développements ultérieurs axés vers le calcul de taux de relaxation d'énergie et l'étude de critères de propagation de fissures. Ce calcul s'effectue à l'aide de l'opérateur "int2d" appliqué à l'expression de la densité d'énergie élastique w exprimée en fonction des champs solutions.

- Visualisation des résultats : L'affichage des maillages (éventuellement déformés), des courbes d'isovaleurs ainsi que des champs de vecteurs peut être obtenu directement dans FreeFem++ par l'utilisation de la commande "plot(var1,..., [liste d'options]);". Ces informations peuvent être aussi imprimées dans des fichiers par des instructions C++ courantes pour être exploitées par d'autres logiciels, spécialisés ou non dans le post-traitement des problèmes aux éléments finis.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une méthode de résolution des équations du M4-5n pour l'analyse 3D des chaussées fissurées basée sur la méthode des éléments finis mixtes. La méthode développée est basée sur le théorème du maximum d'énergie complémentaire utilisant les multiplicateurs de Lagrange pour assurer les équations d'équilibre et les conditions limites. La formulation résultante est équivalente au principe variationnel d'Hellinger-Reissner appliqué aux champs de déplacements et des contraintes généralisés. Ensuite, cette formulation est résolue en utilisant la méthode des éléments finis mixtes dans laquelle les champs de contrainte et de déplacement généralisés sont discrétisés selon deux choix d'ensemble d'espaces d'interpolation. Ces choix assurent un bon conditionnement du système d'équations algébriques à résoudre. Ces développements numériques ont donné lieu à l'implémentation d'un script FreeFem++ nommé M4-5nW EFM. La validation de cet outil par rapport au cas de référence M4-5nW en déformations planes (outil nommé pour la suite M4-5nW DF) développé dans le chapitre 3 fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 5

Validation du M4-5nW résolu à l'aide d'éléments finis mixtes (EFM) par rapport à la méthode aux différences finies (DF) et à une solution analytique de plaque

Dans ce chapitre, nous validons la méthode de résolution du M4-5n par éléments finis mixtes développée dans le chapitre précédent et implémentée dans le logiciel FreeFem++. Dans la suite, l'outil obtenu est nommé M4-5nW EFM (Eléments Finis Mixtes). Dans un premier temps, la validation s'effectue par comparaison avec le code établi par différences finies au chapitre 3 (noté par la suite M4-5nW DF, Différences Finies). Pour ce faire nous nous ramenons dans FreeFem++ au cas étudié par M4-5nW DF en adaptant le chargement et les conditions limites aux bords de la bande rectangulaire modélisée de façon à rendre le problème indépendant de y . Deux cas d'études pour chaussée fissurée et non fissurée sont présentés. Afin de valider également l'outil dans le cas véritablement "3D" (2D EF), une comparaison est effectuée avec une solution analytique de plaque en flexion.

5.1 Validation de l'outil M4-5nW EFM sur un bicouche non fissuré - Cas 2D déformations planes

Dans cette section, l'exemple choisi est inspiré de celui retenu dans le chapitre 3. Afin de tester un cas simple, la chaussée est simplifiée à la modélisation de la couche d'assise constituée d'une couche de grave bitume (GB3) et d'une couche de grave ciment (GC3) (bicouche); et des ressorts de Winkler pour modéliser le sol. Les épaisseurs e^i ($i \in \{1, 2\}$), les modules d'Young E^i et les coefficients de Poisson ν^i sont donnés dans le tableau 5.1. Le bicouche est de longueur $L_x = 1m$ et de largeur $L_y = 1m$. La charge de pression $q_c = 1$ MPa, de longueur $l_{xc} = 1m$ et largeur $l_{yc} = 1m$ est uniformément répartie sur toute la surface du bicouche. Le sol est modélisé par les ressorts de Winkler ayant une raideur

5.1. VALIDATION DE L'OUTIL M4-5NW EFM SUR UN BICOUCHE NON FISSURÉ - CAS 2D DÉFORMATIONS PLANES

$k = 76MPa/m$ ($E^s = 120 MPa$), calculée à partir de l'Eq. 3.2 (Figure 5.1).

TABLE 5.1 – Tableau donnant les caractéristiques géométriques et mécaniques de l'exemple modélisé

	$e^i(m)$	$E^i(MPa)$	ν^i
Couche 1 : GB3	0.15	9300	0.35
Couche 2 : GC3	0.23	23000	0.25

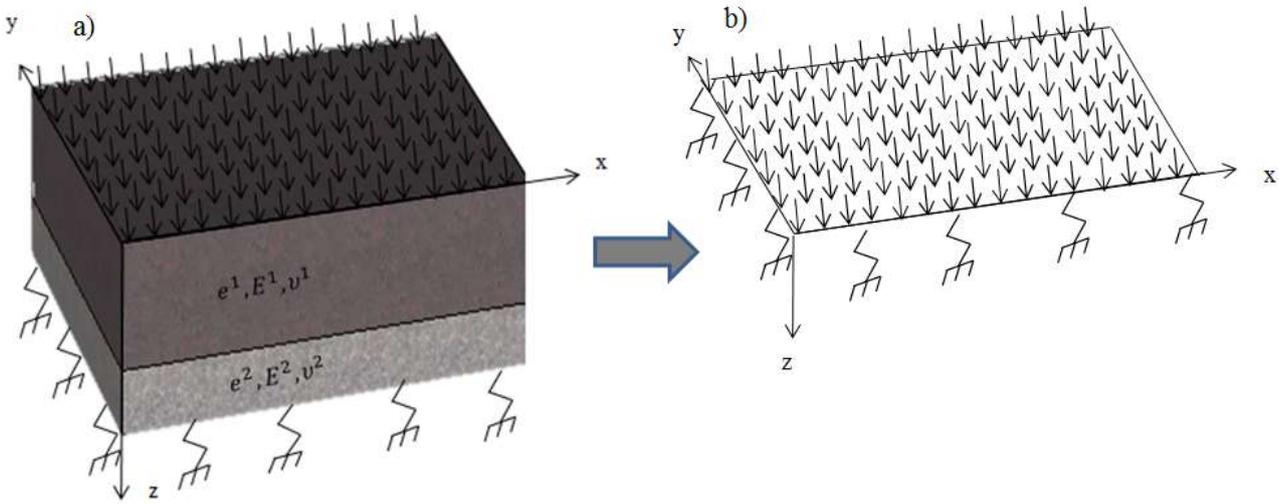


FIGURE 5.1 – Sketch de la chaussée simplifiée en 3D : a) structure réelle ; b) structure modélisée

Les conditions limites au-dessus du bicouche sont : $\tau_1^{0,1} = \tau_2^{0,1} = 0$ et $\nu^{0,1} = -q_c$; ceux au-dessous du bicouche sont : $\tau_1^{2,3} = \tau_2^{2,3} = 0$. Les conditions limites appliquées aux bords du bicouche ayant une normale parallèle à l'axe des x correspondent à ceux d'un bord bloqué (Eq. 4.21). Ceux appliquées aux bords qui ont une normale parallèle à l'axe des y correspondent à ceux d'un bord libre (4.21). Ces conditions limites permettent de se ramener à un problème où les champs mécaniques généralisés ne dépendent que de x , qui peut être traité par le M4-5nW DF (discrétisation linéique 1D).

Comme la validation de M4-5nW EFM en "2D" appliqué sur un bicouche ($n=2$) avec des ressorts de Winkler (Figure 5.1) est faite par rapport à M4-5nW DF (2D déformations planes) appliqué sur un quadricouche ($n=4$) avec des ressorts de Winkler (3 couches pour modéliser la chaussée et une couche de cisaillement ajouter aux ressorts de Winkler pour modéliser le sol) (Figure 3.1), nous avons adapté ce dernier afin de pouvoir obtenir les champs mécaniques aux mêmes endroits. Nous considérons que les deux premières couches modélisées par l'outil M4-5nW DF ont une épaisseur $e^1 = e^2 = 0.075m$, un module d'Young $E^1 = E^2 = 9300MPa$ et un coefficient de Poisson $\nu^1 = \nu^2 = 0.35$. Les deux dernières couches de M4-5nW ont une épaisseur $e^3 = e^4 = 0.115m$, un module d'Young $E^1 = E^2 = 23000MPa$

5.1. VALIDATION DE L'OUTIL M4-5NW EFM SUR UN BICOUCHE NON FISSURÉ - CAS 2D DÉFORMATIONS PLANES

et un coefficient de Poisson $\nu^1 = \nu^2 = 0.25$. La moyenne des champs mécaniques des deux premières couches du quadricouche est comparé avec ceux de la première couche du bicouche modélisé par le M4-5nW EFM. De même, la moyenne des champs mécaniques des deux dernières couches du quadricouche est comparé avec ceux de la deuxième couche du bicouche. Les efforts des interfaces 2,3 et 4,5 du quadricouche sont comparés respectivement avec ceux des interfaces 1,2 et 2,3 du bicouche.

L'équation de δL (Eq. 4.31) pour le bicouche modélisé s'écrit explicitement comme suit (Eq. 5.1) :

$$\begin{aligned}
& \delta L(N_{11}^1, M_{11}^1, Q_1^1, \underbrace{\tau_1^{0,1}}_{=0}, \underbrace{\tau_2^{0,1}}_{=0}, \underbrace{\nu^{0,1}}_{=-q_c}, U_1^1, \phi_1^1, U_3^1, N_{11}^2, \dots, \tau_1^{1,2}, \tau_2^{1,2}, \nu^{1,2}, \dots, \underbrace{\tau_1^{2,3}}_{=0}, \underbrace{\tau_2^{2,3}}_{=0}, \nu^{2,3}, \dots, U_3^2) \\
& \delta N_{11}^1, \delta M_{11}^1, \delta Q_1^1, \underbrace{\delta \tau_1^{0,1}}_{=0}, \underbrace{\delta \tau_2^{0,1}}_{=0}, \underbrace{\delta \nu^{0,1}}_{=-q_c}, \delta U_1^1, \delta \phi_1^1, \delta U_3^1, \delta N_{11}^2, \dots, \delta \tau_1^{1,2}, \delta \tau_2^{1,2}, \delta \nu^{1,2}, \dots, \underbrace{\delta \tau_1^{2,3}}_{=0}, \underbrace{\delta \tau_2^{2,3}}_{=0}, \delta \nu^{2,3}, \dots, \delta U_3^2) \\
& = - \int_{\omega} \delta(w + w_{Winkler}) dS + \sum_{i=1}^2 \int_{\omega} \left[(U_{1,1}^i \delta N_{11}^i + U_{1,2}^i \delta N_{12}^i) + (\delta U_{1,1}^i N_{11}^i + \delta U_{1,2}^i N_{12}^i) \right. \\
& + (U_{2,2}^i \delta N_{22}^i + U_{2,1}^i \delta N_{12}^i) + (\delta U_{2,2}^i N_{22}^i + \delta U_{2,1}^i N_{12}^i) + (\phi_{1,1}^i \delta M_{11}^i + \phi_{1,2}^i \delta M_{12}^i) + (\delta \phi_{1,1}^i M_{11}^i + \delta \phi_{1,2}^i M_{12}^i) \\
& + (\phi_{2,2}^i \delta M_{22}^i + \phi_{2,1}^i \delta M_{12}^i) + (\delta \phi_{2,2}^i M_{22}^i + \delta \phi_{2,1}^i M_{12}^i) + \phi_1^i \delta Q_1^i + \delta \phi_1^i Q_1^i + \phi_2^i \delta Q_2^i + \delta \phi_2^i Q_2^i \\
& + (U_{3,1}^i \delta Q_1^i + U_{3,2}^i \delta Q_2^i) + (\delta U_{3,1}^i Q_1^i + \delta U_{3,2}^i Q_2^i) \left. \right] dS - \int_{\omega} \left[\tau_1^{1,2} \delta U_1^1 + \delta \tau_1^{1,2} U_1^1 + \tau_2^{1,2} \delta U_2^1 + \delta \tau_2^{1,2} U_2^1 \right. \\
& + \frac{e^1}{2} (\tau_1^{1,2} \delta \phi_1^1 + \delta \tau_1^{1,2} \phi_1^1 + \tau_2^{1,2} \delta \phi_2^1 + \delta \tau_2^{1,2} \phi_2^1) + \delta \nu^{1,2} U_3^1 + (\nu^{1,2} + q_c) \delta U_3^1 \left. \right] dS \\
& + \int_{\omega} \left[\tau_1^{1,2} \delta U_1^2 + \delta \tau_1^{1,2} U_1^2 + \tau_2^{1,2} \delta U_2^2 + \delta \tau_2^{1,2} U_2^2 - \frac{e^2}{2} (\tau_1^{1,2} \delta \phi_1^2 + \delta \tau_1^{1,2} \phi_1^2 + \tau_2^{1,2} \delta \phi_2^2 + \delta \tau_2^{1,2} \phi_2^2) \right. \\
& - (\delta \nu^{2,3} - \delta \nu^{1,2}) U_3^2 - (\nu^{2,3} - \nu^{1,2}) \delta U_3^2 \left. \right] dS - \sum_{i=1}^2 \int_{\partial \omega_U} \left[(\delta N_{11}^i n_1 + \delta N_{12}^i n_2) U_1^i + (N_{11}^i n_1 + N_{12}^i n_2) \delta U_1^i \right. \\
& + (\delta N_{22}^i n_2 + \delta N_{12}^i n_1) U_2^i + (N_{22}^i n_2 + N_{12}^i n_1) \delta U_2^i + (\delta M_{11}^i n_1 + \delta M_{12}^i n_2) \phi_1^i + (M_{11}^i n_1 + M_{12}^i n_2) \delta \phi_1^i \\
& + (\delta M_{22}^i n_2 + \delta M_{12}^i n_1) \phi_2^i + (M_{22}^i n_2 + M_{12}^i n_1) \delta \phi_2^i + (\delta Q_1^i n_1 + \delta Q_2^i n_2) U_3^i + (Q_1^i n_1 + Q_2^i n_2) \delta U_3^i \left. \right] dl
\end{aligned} \tag{5.1}$$

avec $\partial \omega_U$ correspond aux deux bords où les conditions limites d'un encastrement sont appliquées. D'après les Eq.s 4.41 et 4.32, $w_{Winkler}$ et δw s'écrivent explicitement sous la forme suivante (Eq.s 5.2 et 5.3) :

$$\delta w_{Winkler} = \frac{\nu^{2,3} \delta \nu^{2,3}}{k} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
& \delta w(N_{11}^1, N_{22}^1, N_{12}^1, M_{11}^1, M_{22}^1, M_{12}^1, Q_1^1, Q_2^1, \underbrace{\tau_1^{0,1}}_{=0}, \underbrace{\tau_2^{0,1}}_{=0}, \underbrace{\nu^{0,1}}_{=-q_c}, N_{11}^2, \dots, \tau_1^{1,2}, \tau_2^{1,2}, \nu^{1,2}, \dots, \underbrace{\tau_1^{2,3}}_{=0}, \underbrace{\tau_2^{2,3}}_{=0}, \nu^{2,3}, \\
& \delta N_{11}^1, \delta N_{22}^1, \delta N_{12}^1, \delta M_{11}^1, \delta M_{22}^1, \delta M_{12}^1, \delta Q_1^1, \delta Q_2^1, \underbrace{\delta \tau_1^{0,1}}_{=0}, \underbrace{\delta \tau_2^{0,1}}_{=0}, \underbrace{\delta \nu^{0,1}}_{=0}, \delta N_{11}^2, \dots, \delta \tau_1^{1,2}, \delta \tau_2^{1,2}, \delta \nu^{1,2}, \dots, \\
& \underbrace{\delta \tau_1^{2,3}}_{=0}, \underbrace{\delta \tau_2^{2,3}}_{=0}, \delta \nu^{2,3}) = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{e^i E^i} (N_{11} \delta N_{11}^i + N_{22}^i \delta N_{22}^i + 2N_{12}^i \delta N_{12}^i (1 + \nu^i) - \nu^i (\delta N_{11}^i N_{22}^i + N_{11}^i \delta N_{22}^i) \right. \\
& + \frac{12}{e^{i3} E^i} (M_{11}^i \delta M_{11}^i + M_{22}^i \delta M_{22}^i + 2M_{12}^i \delta M_{12}^i (1 + \nu^i) - \nu^i (\delta M_{11}^i M_{22}^i + \delta M_{22}^i M_{11}^i) \\
& + \left. \frac{12(1 + \nu^i)}{5e^i E^i} (Q_1^i \delta Q_1^i + Q_2^i \delta Q_2^i) \right] + \frac{13e^1}{35E^1} \nu^{1,1} \delta \nu^{1,2} + \frac{13e^2}{35E^2} (\nu^{1,2} \delta \nu^{1,2} + \nu^{2,3} \delta \nu^{2,3}) \\
& + \frac{9e^1}{35E^1} (-q_c \nu^{1,2}) + \frac{9e^2}{35E^2} (\delta \nu^{1,2} \nu^{2,3} + \nu^{1,2} \delta \nu^{2,3}) + \frac{4e^1(1 + \nu^1)}{15E^1} (\tau_1^{1,2} \delta \tau_1^{1,2} + \tau_2^{1,2} \delta \tau_2^{1,2}) \\
& + \frac{4e^2(1 + \nu^2)}{15E^2} (\tau_1^{1,2} \delta \tau_1^{1,2} + \tau_2^{1,2} \delta \tau_2^{1,2}) - \frac{(1 + \nu^1)}{5E^1} (\delta Q_1^1 \tau_1^{1,2} + Q_1^1 \delta \tau_1^{1,2} + \delta Q_2^1 \tau_2^{1,2} + Q_2^1 \delta \tau_2^{1,2}) \\
& - \frac{(1 + \nu^2)}{5E^2} (\delta Q_1^2 \tau_1^{1,2} + Q_1^2 \delta \tau_1^{1,2} + \delta Q_2^2 \tau_2^{1,2} + Q_2^2 \delta \tau_2^{1,2}) \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Comme dit dans le chapitre précédent, le maillage est composé d'éléments triangulaires. Nous avons considéré que celui-ci est régulier et que tous les bords du maillage sont discrétisés avec le même nombre d'éléments. Les deux types de fonctions d'interpolation des champs mécaniques discrétisés décrits dans le chapitre 4 (polynômes de Lagrange de degré élevé et polynômes de Lagrange avec fonction bulle) sont testés.

L'ordre d'interpolation des polynômes de Lagrange est choisi selon l'Eq. 4.38. Comme le nombre d'inconnues est élevé (26 inconnues de couches et 4 inconnues d'interfaces par élément), on ne peut pas dépasser 13 éléments discrétisés par bord (maillage 13x13) pour la géométrie étudiée (1mx1m) (limitation du PC utilisé). La valeur numérique de l'énergie élastique calculée par FreeFem++ ainsi que le temps de calcul sont donnés dans le tableau 5.2 donné plus loin.

Avec l'utilisation des polynômes d'interpolation de degré 1 pour les champs de déplacement (P1) et de degré 1 avec fonction bulle (P1b) pour les champs des efforts généralisés, on peut raffiner le maillage mais sans dépasser 32 nœuds par bord (limitation du PC utilisé). Les courbes d'isovaleurs dans le plan (O,x,y) des champs mécaniques moyens de la première couches ainsi que ceux des deux interfaces 1,2 et 2,3 sont données dans les Figures 5.2 à 5.10 pour un maillage 32x32. Comme le problème étudié est ramené à un problème linéique, les champs mécaniques dépendent seulement de la variable x et ne dépendent plus de la variable y, raison pour laquelle on obtient des isovaleurs parallèles y et des champs mécaniques nuls en y ($U_2^i(x, y)$, $\phi_2^i(x, y)$, $Q_2^i(x, y)$, $\tau_2^{i,i+1}(x, y)$). La valeur numérique de l'énergie élastique calculée par FreeFem++ ainsi que le temps de calcul pour les deux maillages 32x32 et 13x13 sont aussi donnés dans le tableau 5.2.

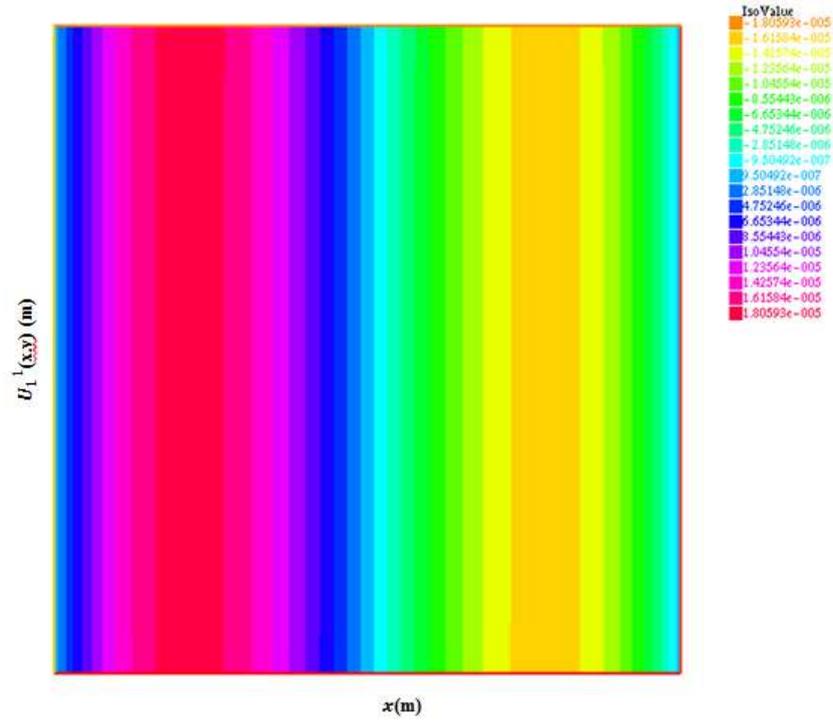


FIGURE 5.2 – Isovaleurs du déplacement horizontal moyen de la première couche ($U_1^1(x, y)$) pour un cas en 2D déformations planes

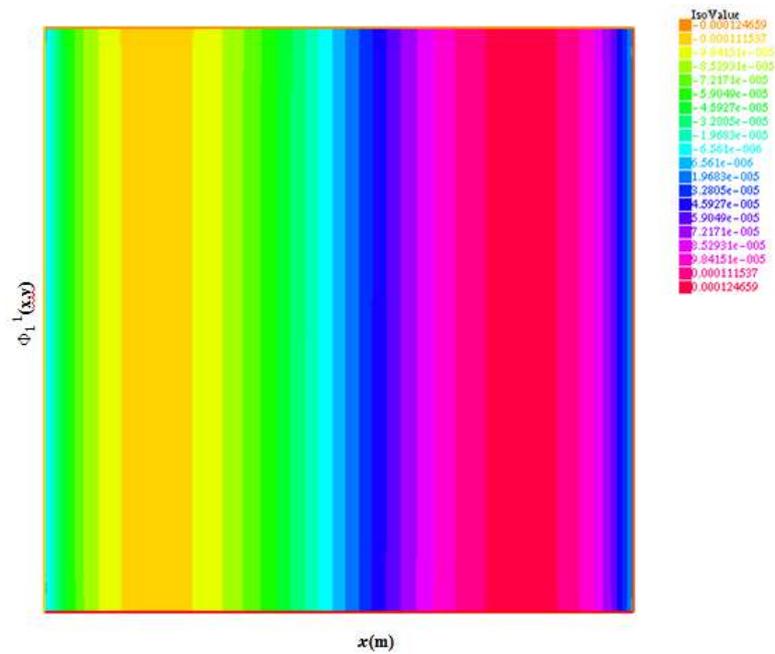


FIGURE 5.3 – Isovaleurs de rotation moyenne de la première couche ($\phi_1^1(x, y)$) pour un cas en 2D déformations planes

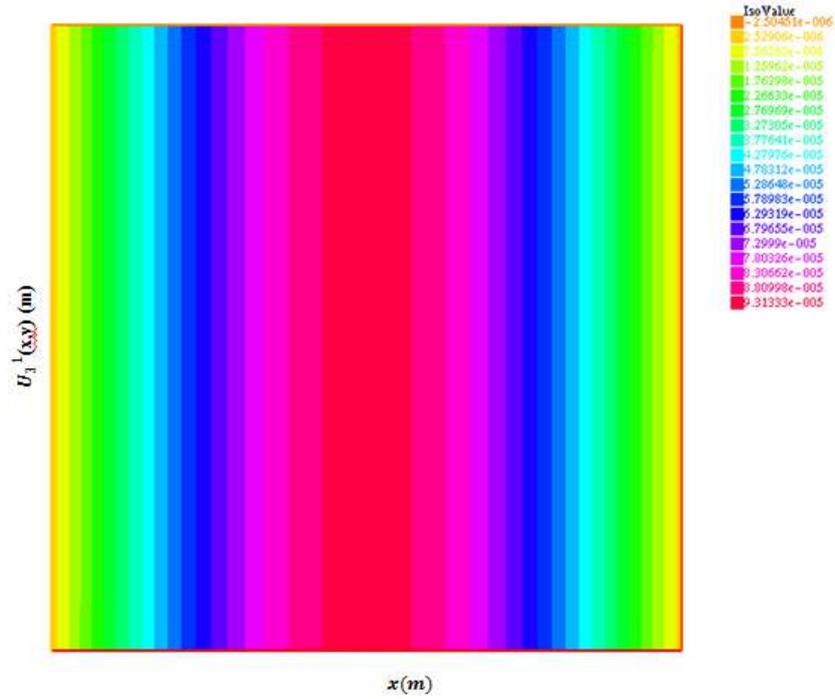


FIGURE 5.4 – Isovaleurs du déplacement vertical moyen de la première couche ($U_3^1(x, y)$) pour un cas en 2D déformations planes

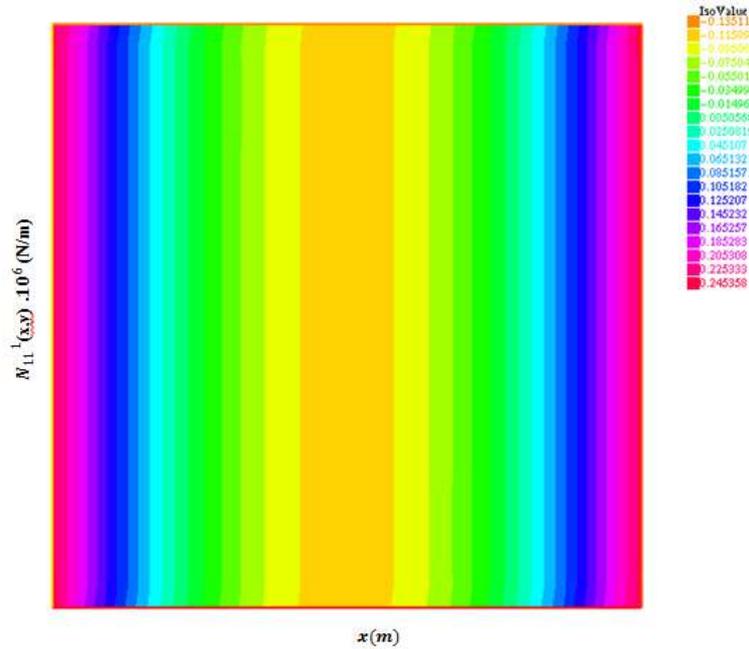
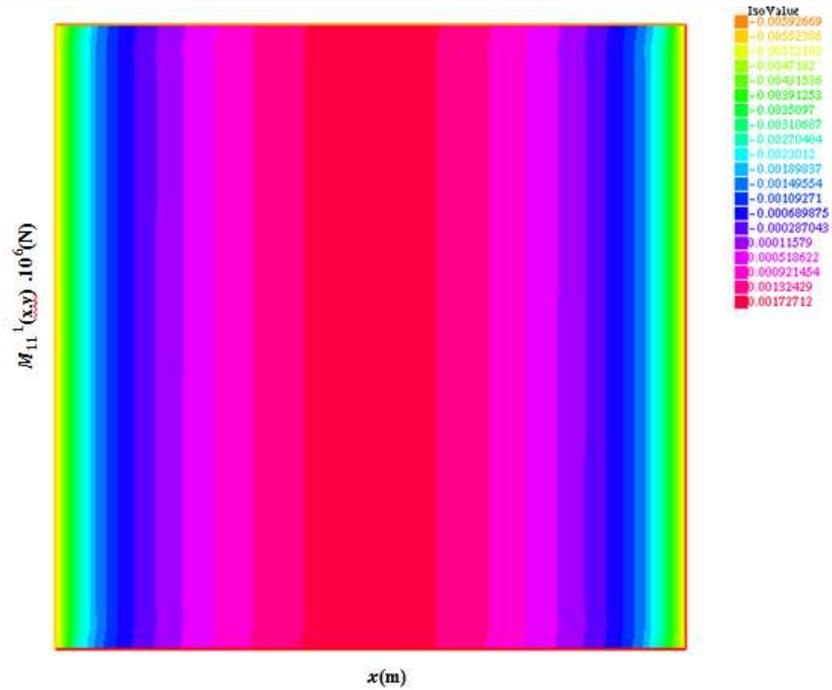


FIGURE 5.5 – Isovaleurs de l'effort normal moyen de la première couche ($N_{11}^1(x, y)$) pour un cas en 2D déformations planes



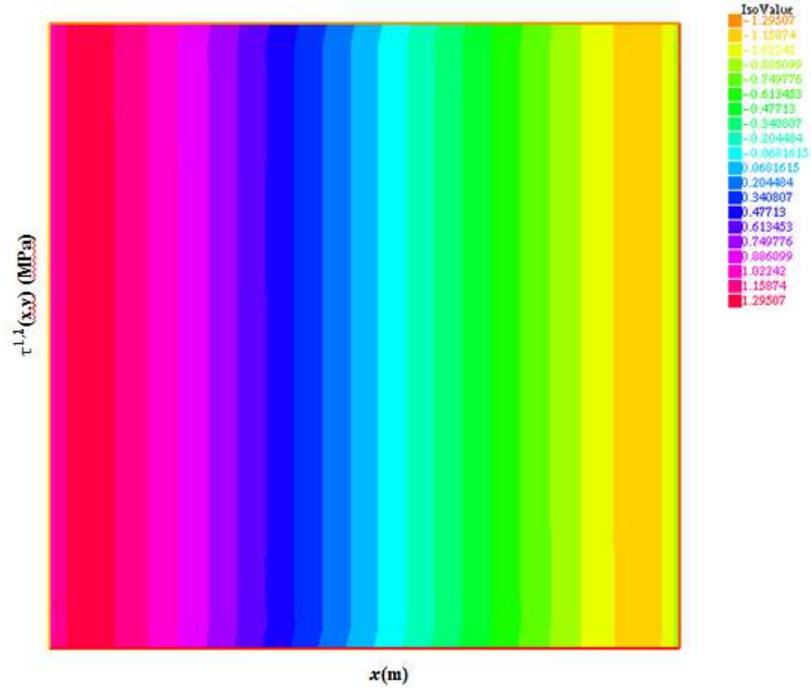
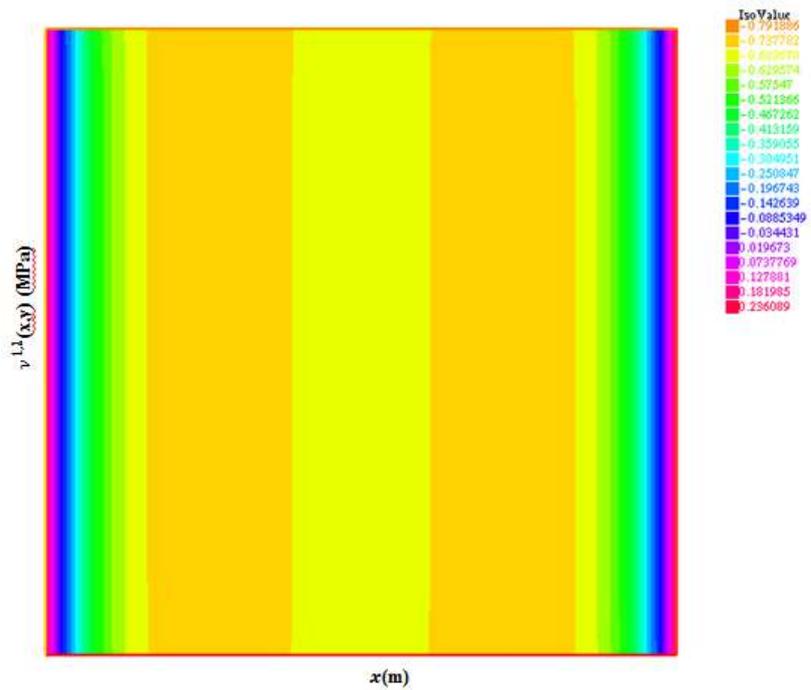


FIGURE 5.8 – Isovaleurs de l'effort d'interface de cisaillement de la première interface 1,2 ($\tau_1^{1,2}(x, y)$) pour un cas en 2D déformations planes



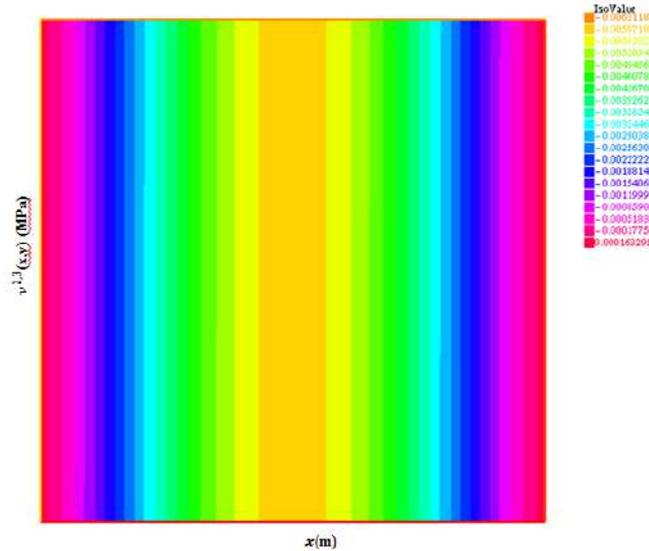


FIGURE 5.10 – Isovaleurs de l'effort d'interface d'arrachement de la deuxième interface 2,3 ($\nu^{2,3}(x,y)$) entre le bicouche et le sol modélisé par les ressorts de Winkler pour un cas en 2D déformations planes

Une première analyse de ces courbes permet de valider qualitativement l'outil développé d'après la symétrie et l'antisymétrie par rapport à $x = L_x/2$ des champs mécaniques obtenus. Par exemple, le déplacement vertical est maximal au centre puis décroît de part et d'autre du centre d'une manière symétrique avant de s'annuler aux deux bords.

Afin de comparer les résultats obtenus pour les deux cas étudiés dans cette section entre eux et avec ceux obtenus par l'outil M4-5nW DF, on trace les profils longitudinaux en $y = L_y/2$ des différents champs mécaniques. Sur les Figures 5.11 à 5.19, les résultats obtenus par le M4-5nWDF sont notés "M4-5nWDF", ceux obtenus par l'outil M4-5nW EFM interpolés par les polynômes de Lagrange d'ordre élevé sont notés "M4-5nWEFM P" et ceux interpolés par les polynômes d'ordre 1 (P1 et P1b) sont notés "M4-5nWEFM B".

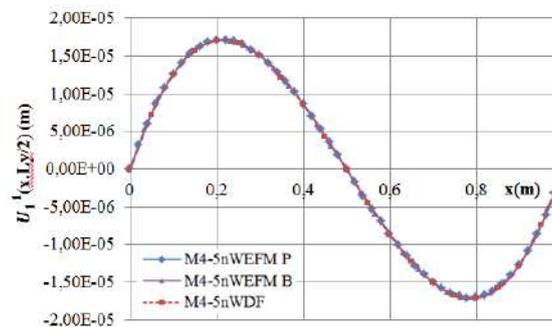


FIGURE 5.11 – Comparaison entre modèles du déplacement horizontal de la première couche $U_1^1(x, L_y/2)$

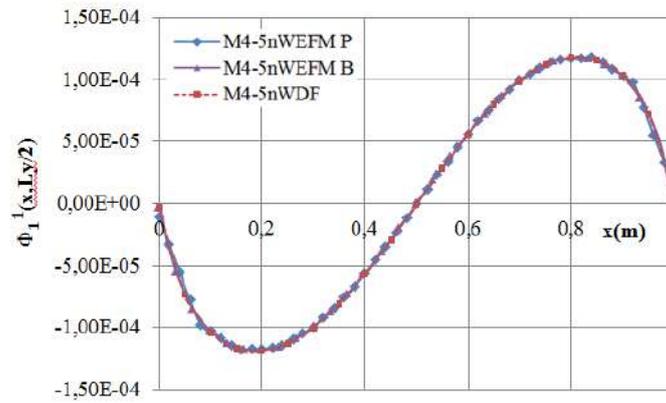


FIGURE 5.12 – Comparaison entre modèles de la rotation de la première couche $\phi_1^1(x, L_y/2)$

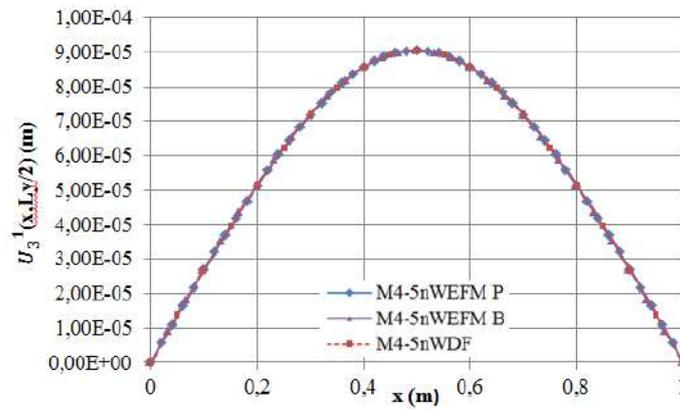


FIGURE 5.13 – Comparaison entre modèles du déplacement vertical de la première couche $U_3^1(x, L_y/2)$

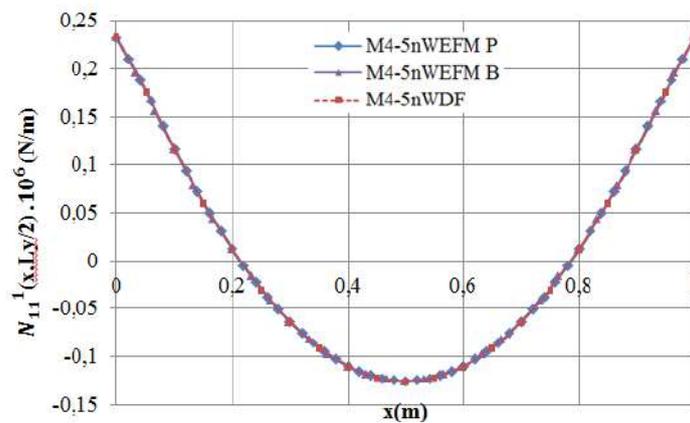


FIGURE 5.14 – Comparaison entre modèles de l'effort normal de la première couche $N_{11}^1(x, L_y/2)$

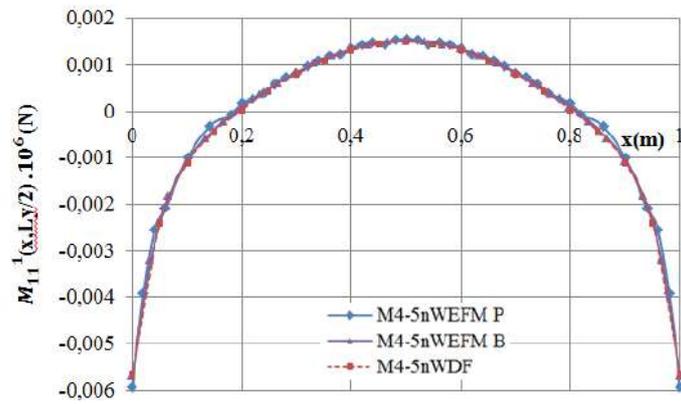


FIGURE 5.15 – Comparaison entre modèles du moment de flexion de la première couche $M_{11}^1(x, L_y/2)$

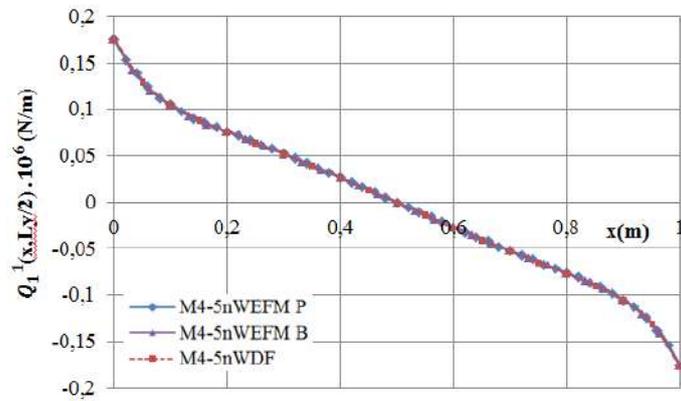


FIGURE 5.16 – Comparaison entre modèles de l'effort tranchant de la première couche $Q_1^1(x, L_y/2)$

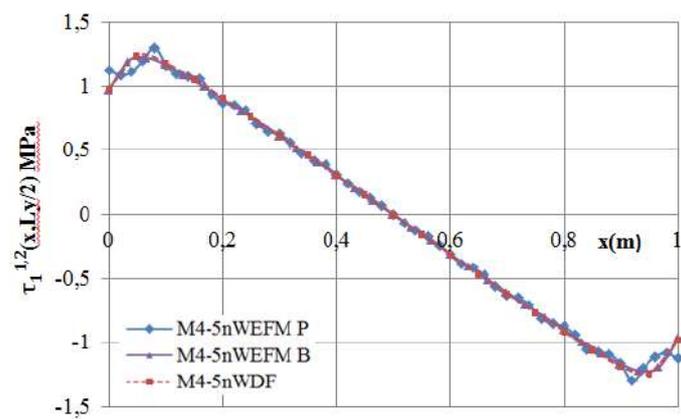


FIGURE 5.17 – Comparaison entre modèles de l'effort d'interface de cisaillement de la première interface $\tau_1^{1,2}(x, L_y/2)$

5.1. VALIDATION DE L'OUTIL M4-5NW EFM SUR UN BICOUCHE NON FISSURÉ - CAS 2D DÉFORMATIONS PLANES

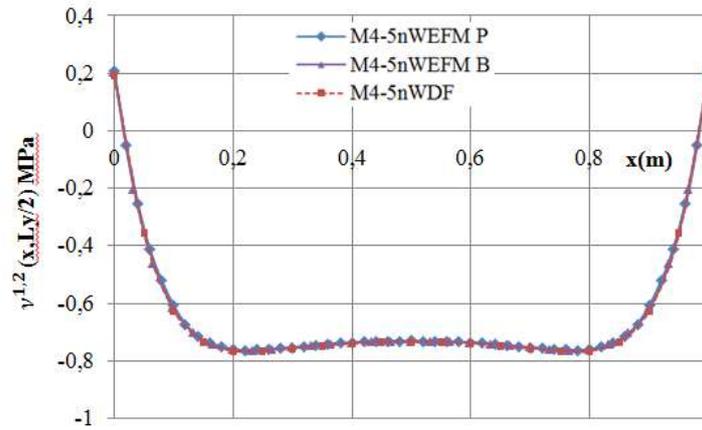


FIGURE 5.18 – Comparaison entre modèles de l'effort d'interface d'arrachement de la première interface $\nu^{1,2}(x, L_y/2)$

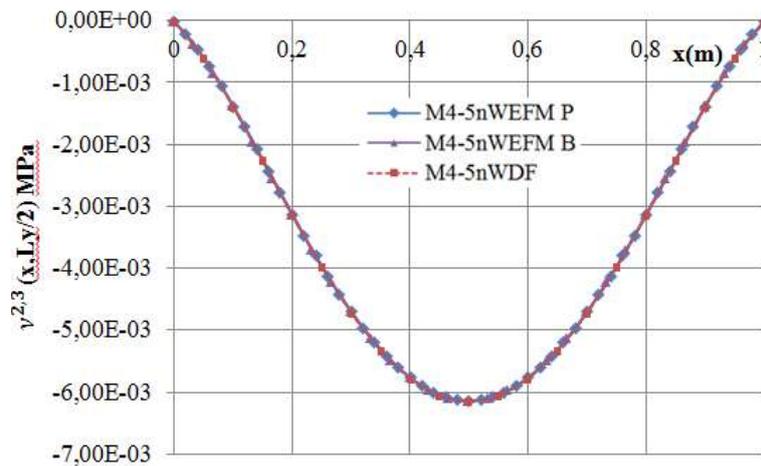


FIGURE 5.19 – Comparaison entre modèles de l'effort d'interface d'arrachement de la deuxième interface $\nu^{2,3}(x, L_y/2)$

TABLE 5.2 – Tableau comparant l'énergie élastique w et le temps de calcul des différents cas étudiés

	M4-5nWEFM P (13x13)	M4-5nWEFM B (13x13)	M4-5nWEFM B (30x30)	M4-5nWDF (13)
$w(MJ)$	$3.19.10^{-5}$	$3.18.10^{-5}$	$3.19.10^{-5}$	$3.20.10^{-5}$
Temps de calcul (s)	125.11	18.99	102.94	0.12

La superposition des courbes des trois cas étudiés valide bien la de résolution du M4-5n par la méthode

des éléments finis mixtes et son implémentation dans FreeFem++ pour un cas de chaussée bicouche non fissurée. D'après le Tableau 5.2, on remarque bien que l'utilisation des polynômes d'ordre 1 avec fonction bulle (P1b) pour les champs de contraintes permet d'accélérer le temps de calcul pour un même maillage (13x13) et donne la possibilité d'augmenter le nombre d'éléments discrétisés. Par contre, l'utilisation des polynômes de Lagrange d'ordre élevé assure la convergence des résultats en utilisant peu d'éléments. Pour la suite, les polynômes P1 et P1b sont utilisés.

5.2 Validation de l'outil M4-5nW EFM sur un bicouche fissuré - Cas 2D déformations planes

Après la validation de l'outil M4-5nW EFM "2D" sur un exemple de chaussée non fissurée constituée de deux couches reposant sur des ressorts de Winkler, nous avons introduit une fissure transversale au centre de la deuxième couche (Figure 5.20) et nous avons comparé les résultats obtenus avec ceux de l'outil M4-5nW DF. On considère que la couche est complètement fissurée. On rappelle que les conditions limites pour le M4-5n sont introduites par couche.

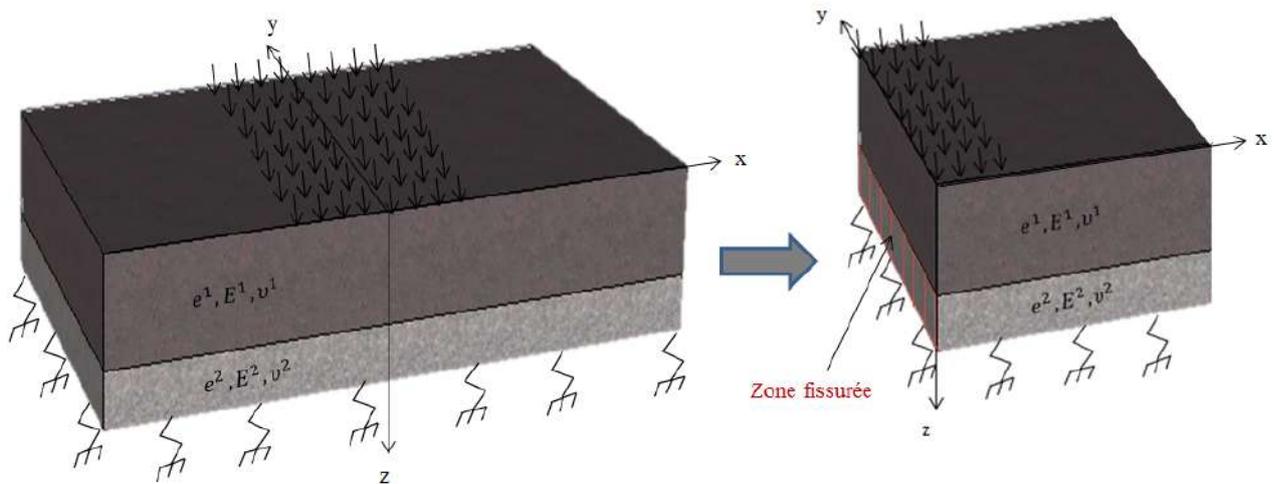


FIGURE 5.20 – Sketch de modélisation simplifiée de la structure de chaussée en 3D

On reprend l'exemple étudié dans la section précédente avec quelques modifications afin de pouvoir valider, outre l'introduction d'une fissure transversale, l'application d'une charge statique de dimensions finies. En déformations planes, les champs mécaniques ne dépendent pas de la variable y , nous avons réduit la largeur de la chaussée à $L_y = 0.001m$ afin de pouvoir raffiner le maillage surtout aux bords de la fissure puisqu'on est limité à 32x32 éléments sur le PC utilisé. La charge de pression $q_c = 1 \text{ MPa}$ et de longueur $l_{xc} = 0.25m$ et largeur $l_{yc} = 0.001m$ est uniformément répartie au centre du bicouche (Figure 5.20).

On rappelle que dans l'outil développé, l'introduction des fissures n'est prévue que sur les axes de

5.2. VALIDATION DE L'OUTIL M4-5NW EFM SUR UN BICOUCHE FISSURÉ - CAS 2D DÉFORMATIONS PLANES

symétrie. Pour introduire la fissure transversale au centre de la deuxième couche, il faut donc tenir compte de la symétrie de la géométrie de l'exemple étudié par rapport à (O,y,z) et modéliser la moitié de la structure. Ceci permet aussi de valider les conditions limites de symétrie appliquées sur le plan de symétrie données dans le chapitre précédent.

Pour introduire la fissure dans δL , les conditions limites de bords libres sont appliquées sur le bord fissuré de la deuxième couche par pénalisation (Eq. 4.42, $i=2$). Les conditions de symétrie pour la première couche non fissurée sont introduites directement dans δL (section 4.4.5). Les conditions limites des autres bords restent inchangées.

Afin de choisir le maillage optimal, un test de convergence des champs mécaniques de la deuxième couche aux bords de la fissure est réalisé. Nous avons remarqué que, comme dans le chapitre 3, 80 éléments sous la charge sont nécessaires pour obtenir la convergence des champs mécaniques au bord de la fissure (40 dans FreeFem++ car la moitié de la structure est modélisée).

Les Figures 5.21 à 5.29 représentent la comparaison des champs mécaniques de la deuxième couche fissurée et des interfaces 1,2 et 2,3 de l'outil M4-5nW EFM noté "M4-5nWEFM B" et ceux de l'outil M4-5nW DF notés "M4-5nWDF". La partie de la structure modélisée par l'outil M4-5nW EFM donne la partie droite des courbes. Pour la restitution des résultats de toute la structure, nous avons défini une fonction dans FreeFem++ qui permet d'obtenir les résultats de la partie non modélisée (gauche) à partir de la partie modélisée en tenant compte de la symétrie et l'antisymétrie des champs mécaniques. Les champs $U_3^i, N_{11}^i, M_{11}^i, \nu^{i,i+1}$ sont symétriques par rapport à (O,y,z) et les champs $U_1^i, \phi_1^i, Q_1^i, \tau_1^{i,i+1}$ sont antisymétriques par rapport à (O,y,z) . Pour un cas d'étude en 3D avec une symétrie par rapport à (O,x,z) , les champs $U_3^i, N_{22}^i, M_{22}^i, \nu^{i,i+1}$ sont symétriques par rapport à (O,x,z) et les champs $U_2^i, \phi_2^i, Q_2^i, \tau_2^{i,i+1}$ sont antisymétriques par rapport à (O,x,z) .

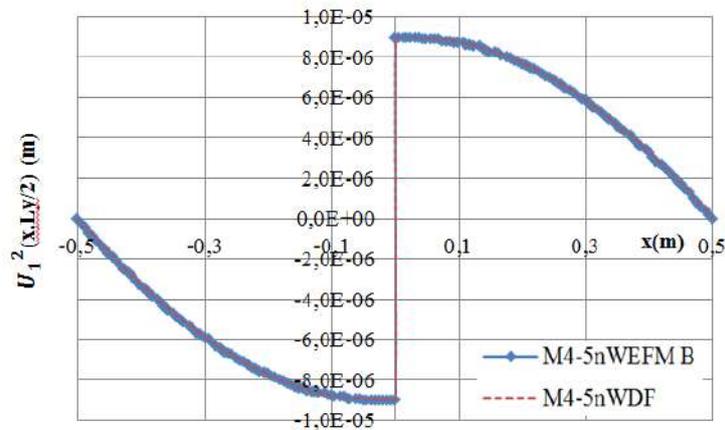


FIGURE 5.21 – Comparaison entre modèles du déplacement horizontal de la deuxième couche $U_1^2(x, L_y/2)$

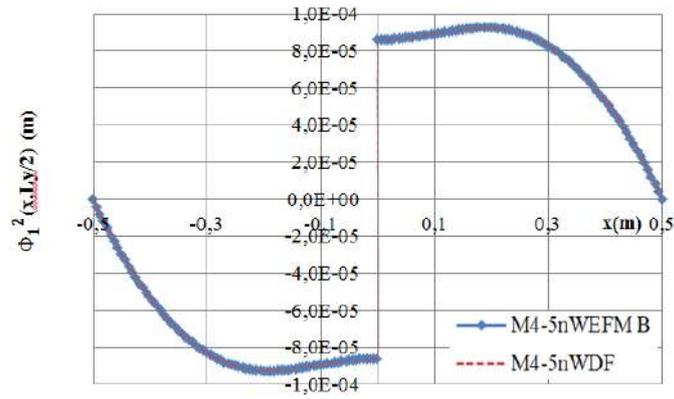


FIGURE 5.22 – Comparaison entre modèles de la rotation de la deuxième couche $\phi_1^2(x, L_y/2)$

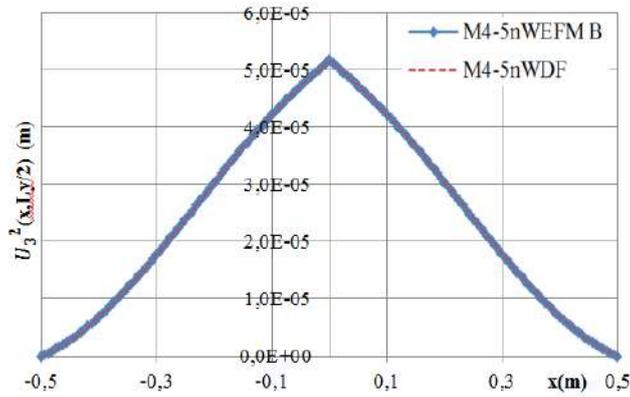


FIGURE 5.23 – Comparaison entre modèles du déplacement vertical de la deuxième couche $U_3^2(x, L_y/2)$

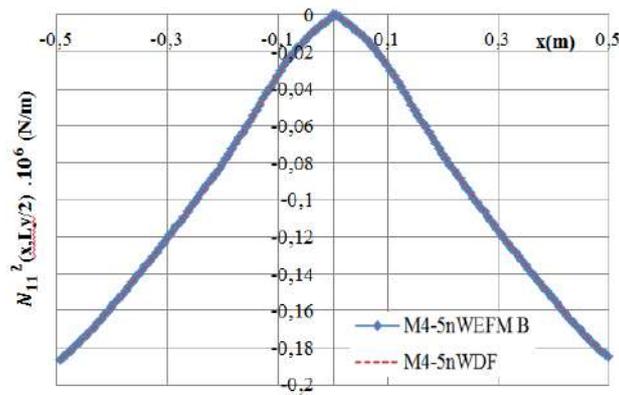


FIGURE 5.24 – Comparaison entre modèles de l'effort normal de la deuxième couche $N_{11}^2(x, L_y/2)$

5.2. VALIDATION DE L'OUTIL M4-5NW EFM SUR UN BICOUCHE FISSURÉ - CAS 2D DÉFORMATIONS PLANES

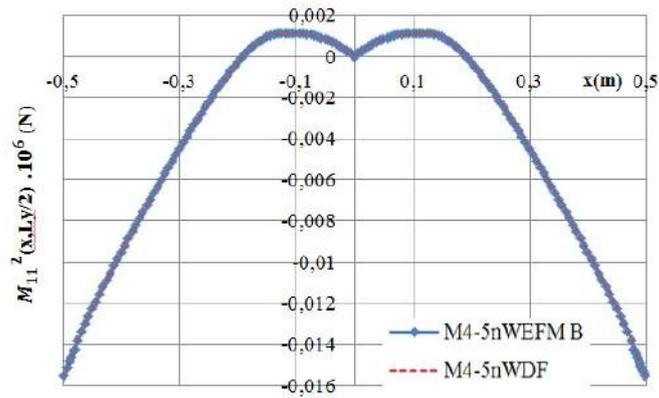


FIGURE 5.25 – Comparaison entre modèles du moment de la deuxième couche $M_{11}^2(x, L_y/2)$

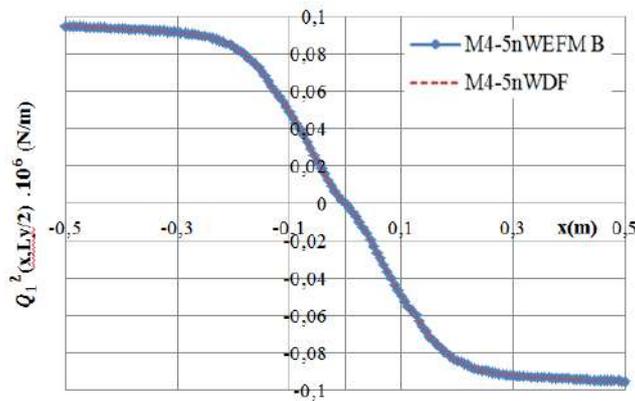


FIGURE 5.26 – Comparaison entre modèles de l'effort tranchant de la deuxième couche $Q_1^2(x, L_y/2)$

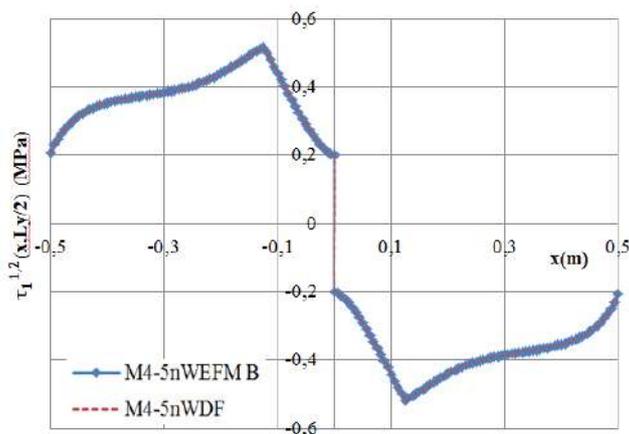


FIGURE 5.27 – Comparaison entre modèles de l'effort d'interface de cisaillement de la première interface $\tau_1^{1,2}(x, L_y/2)$

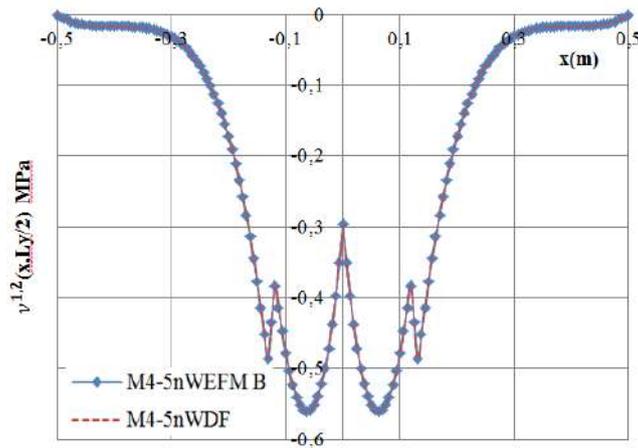


FIGURE 5.28 – Comparaison entre modèles de l'effort d'interface d'arrachement de la première interface $\nu^{1,2}(x, L_y/2)$

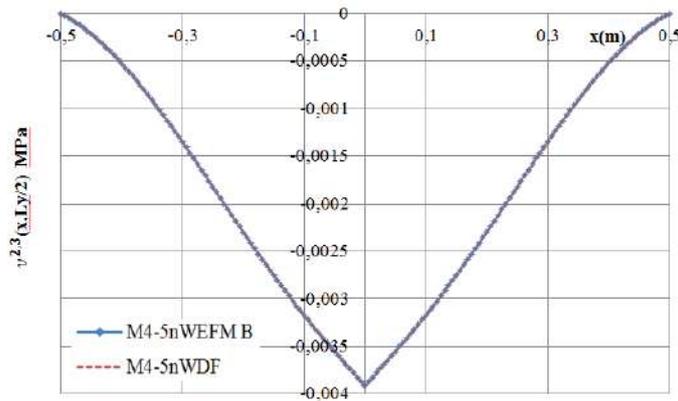


FIGURE 5.29 – Comparaison entre modèles de l'effort d'interface d'arrachement de la deuxième interface $\nu^{2,3}(x, L_y/2)$

On remarque la bonne concordance des résultats pour tous les champs mécaniques de couche et d'interface obtenus avec le M4-5nWDF et M4-5nWEFM. Ceci valide l'outil développé sur une structure bicouche en déformations planes présentant une fissure transversale au centre de la deuxième couche.

Afin de comparer le choix des espaces d'interpolation des champs généralisés sur ce cas de bicouche fissuré, on présente dans les tableaux 5.3 et 5.4 la valeur de l'effort d'interface de cisaillement entre les couches 1 et 2 au bord de la fissure $\tau^{1,2}(0, L_y/2)$ (MPa) ainsi que le temps de calcul pour différents nombre d'éléments sous la charge et pour les deux espaces d'interpolations choisis dans ce travail. Le maillage utilisé pour cette étude est le suivant : suivant l'axe des y, le nombre d'éléments est égal à 1 ; suivant l'axe des x, le nombre d'éléments sous la charge fait l'objet d'un test paramétrique et il est égal à 10 éléments pour le reste de la structure.

TABLE 5.3 – Tableau comparant la valeur de l'effort d'interface de cisaillement entre les couches 1 et 2 au bord de la fissure $\tau^{1,2}(0, L_y/2)$ (MPa) et le temps de calcul pour différents nombre d'éléments sous la charge en utilisant les polynômes d'ordre élevés

Nombre d'éléments sous la charge (M4-5nWEFM P)	1	2	3	4	5	10	80
$\tau^{1,2}(0, L_y/2)$ (MPa)	-0.172	-0.173	-0.174	-0.174	-0.175	-0.175	-0.175
Temps de calcul (s)	6.18	6.7	7.39	7.81	8.49	10.53	42.73

TABLE 5.4 – Tableau comparant la valeur de l'effort d'interface de cisaillement entre les couches 1 et 2 au bord de la fissure $\tau^{1,2}(0, L_y/2)$ (MPa) et le temps de calcul pour différents nombre d'éléments sous la charge en utilisant les P1 et P1B

Nombre d'éléments sous la charge (M4-5nWEFM B)	1	2	3	4	5	10	80
$\tau^{1,2}(0, L_y/2)$ (MPa)	-0.156	-0.165	-0.171	-0.172	-0.173	-0.175	-0.175
Temps de calcul (s)	1.38	1.75	1.84	2.01	2.28	2.54	10

On remarque d'après ces deux tableaux que les résultats obtenus en utilisant les P1 et P1B (tableau 5.4) convergent (à 10^{-2} MPa) en utilisant 4 éléments sous la charge alors qu'un seul élément est nécessaire pour obtenir la même valeur en utilisant les polynômes de degré élevés (tableau 5.3). Bien qu'un seul élément soit nécessaire pour avoir la même précision des valeurs utilisant les quatre éléments, le temps de calcul reste plus élevé à cause de la richesse des polynômes utilisés.

5.3 Validation de l'outil M4-5nW EFM sur l'exemple d'une plaque en flexion

Afin de compléter la validation 3D de l'outil M4-5nW EFM (discrétisation 2D), on reprend l'exemple étudié dans la thèse de (Tung Nguyen, 2004) : un bicouche bi-encasté avec les caractéristiques géométriques et mécaniques suivantes : $L_x = L_y = 2m$, $e^1 = e^2 = 0.1m$; $E^1 = E^2 = 70000.10^{-6} MPa$, la charge $q_c = 1.10^{-6} MPa$ est uniformément répartie sur toute la surface. En utilisant un maillage de 20x20, on obtient la valeur numérique de la flèche maximale au centre de la plaque donnée dans le tableau 5.5. On compare cette valeur avec les valeurs numérique et analytiques obtenues par (Tung Nguyen, 2004).

TABLE 5.5 – Tableau comparant les résultats analytiques et numériques du déplacement vertical

	Valeur numérique (M4-5nWEFM)	Valeur numérique (Tung Nguyen, 2004)	Valeur analytique (Tung Nguyen, 2004)
$U_3^1(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2})10^{-4}(m)$	4.67	4.69	4.66

On remarque bien la cohérence entre les 3 résultats à $10^{-6}m$ près. La figure 5.30 montre la distribution du déplacement vertical de la première couche $U_3^1(x, y)$ sur toute la surface obtenue par l'outil M4-5nW EFM.

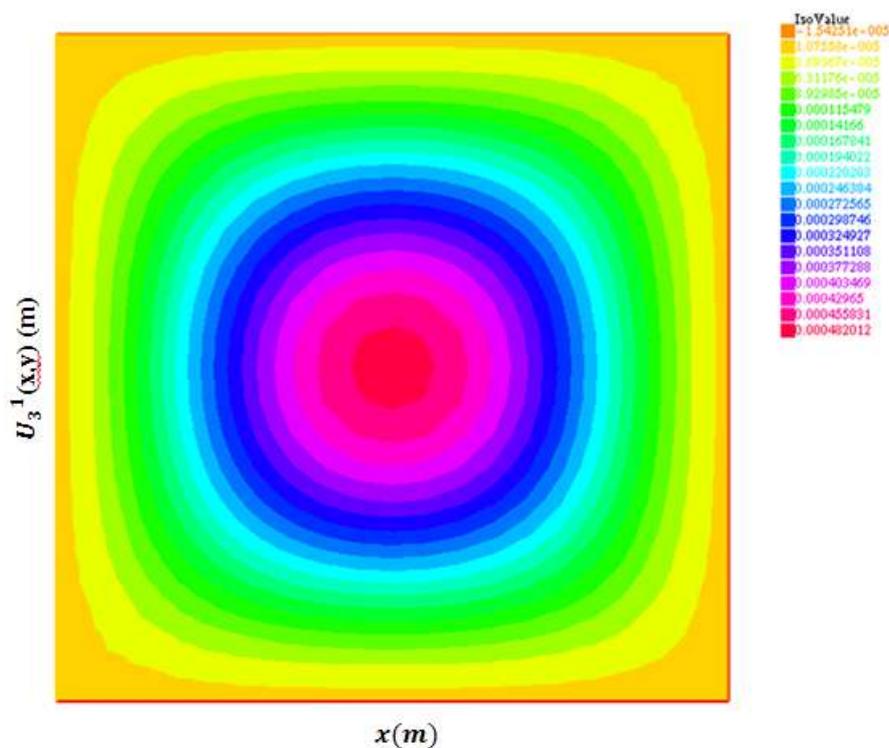


FIGURE 5.30 – Déplacement vertical de la première couche $U_3^1(x, y)$

Nous donnons par la suite les champs mécaniques 3D obtenus pour l'exemple du bicouche non fissuré étudié dans la section 5.1 avec un chargement carré de dimensions $l_{x_c} = 0.25m$ et $l_{y_c} = 0.25m$. On note que pour ce bicouche, tous les bords sont bloqués. Il faut donc appliquer les conditions limites d'un bord bloqué sur tous les bords dans δL (Eq. 4.21).

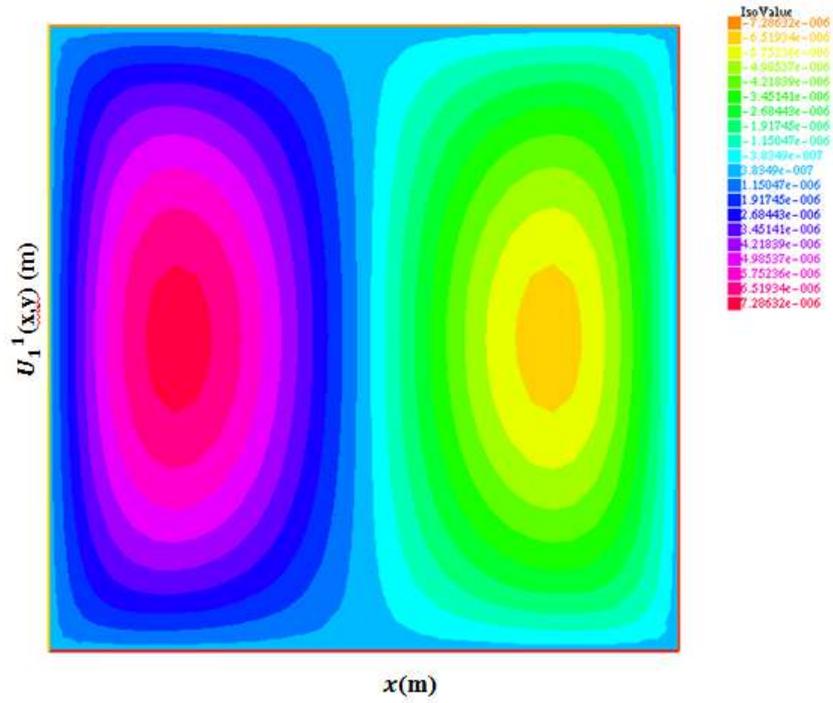


FIGURE 5.31 – Isovaleurs du déplacement horizontal moyen de la première couche ($U_1^1(x, y)$) pour un cas en 3D

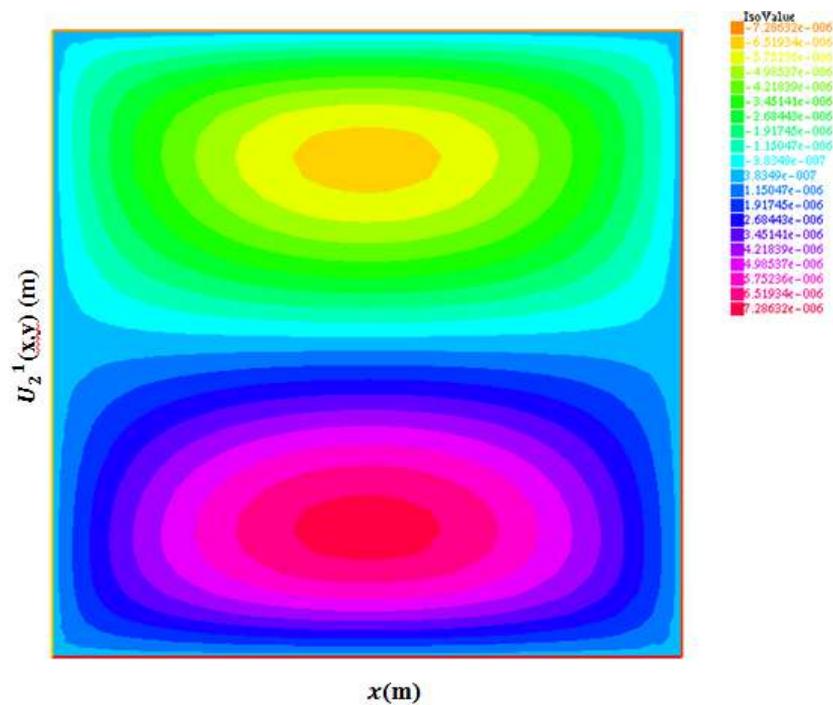


FIGURE 5.32 – Isovaleurs du déplacement horizontal moyen de la première couche ($U_2^1(x, y)$) pour un cas en 3D

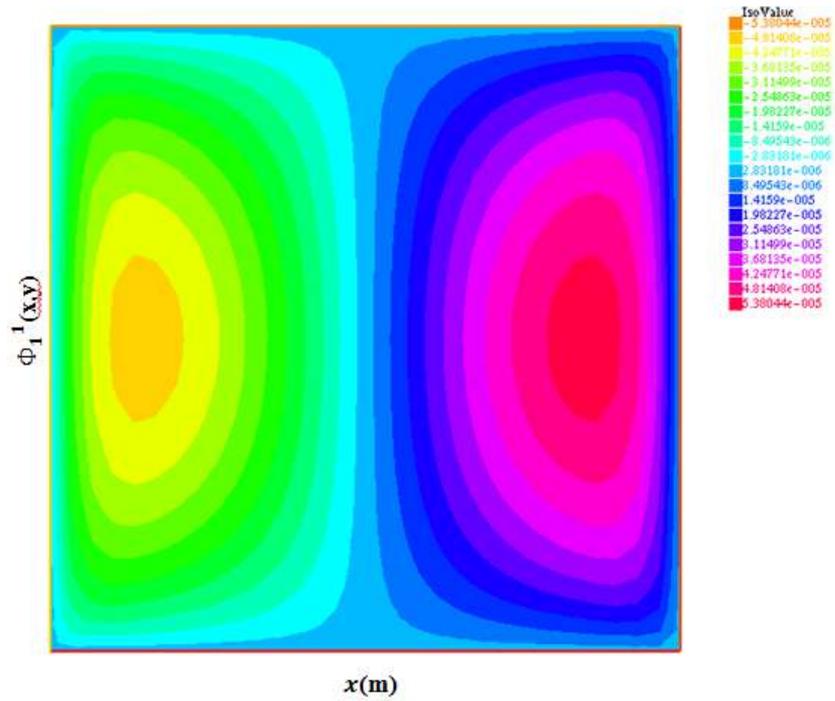


FIGURE 5.33 – Isovaleurs de la rotation moyenne de la première couche ($\phi_1^1(x,y)$) pour un cas en 3D

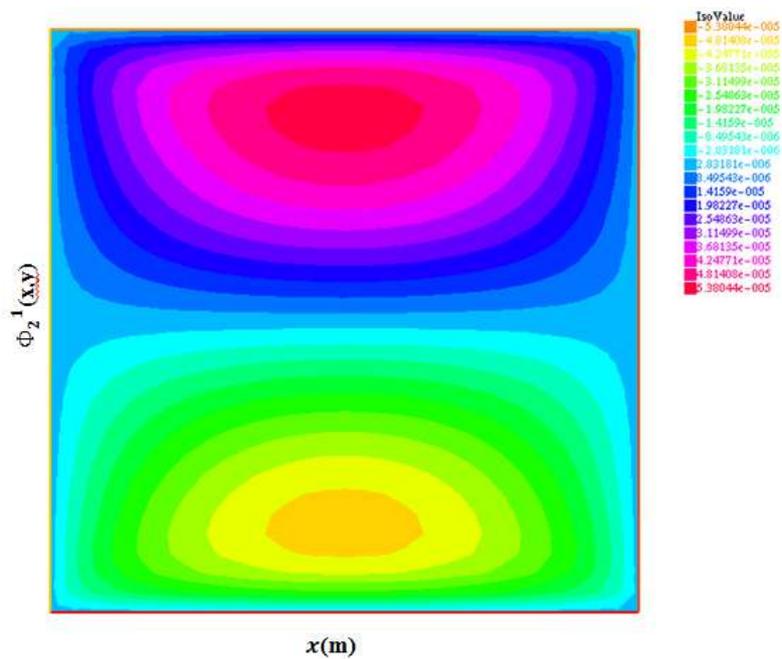


FIGURE 5.34 – Isovaleurs de la rotation moyenne de la première couche ($\phi_2^1(x,y)$) pour un cas en 3D

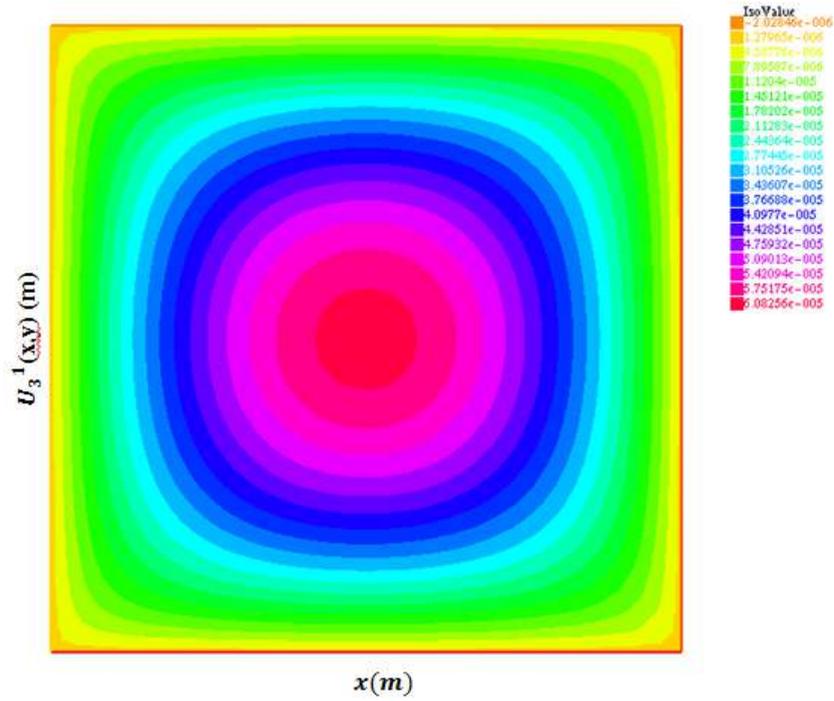


FIGURE 5.35 – Isovaleurs du déplacement vertical moyen de la première couche ($U_3^1(x,y)$) pour un cas en 3D

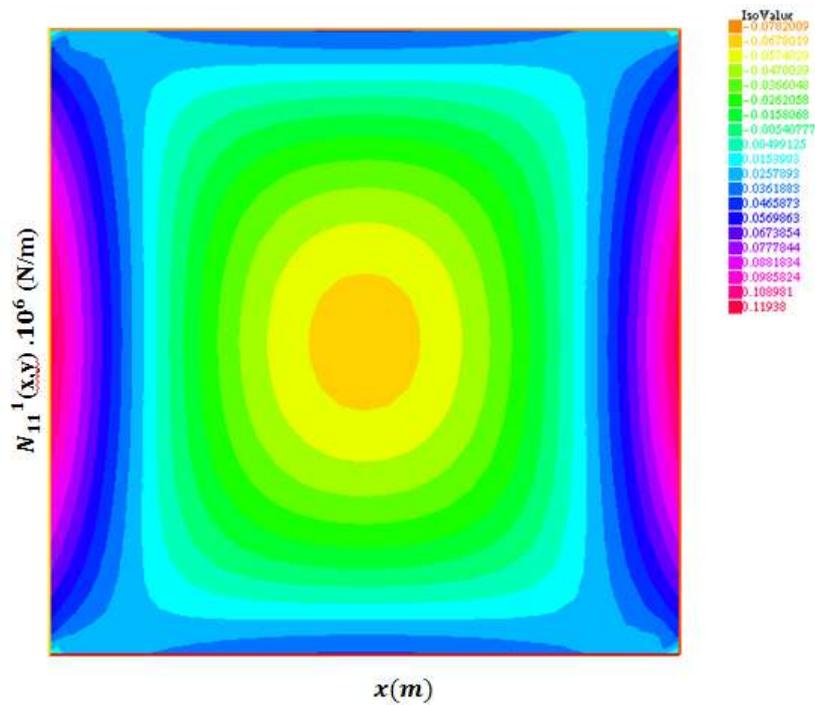


FIGURE 5.36 – Isovaleurs de l'effort normal de la première couche ($N_{11}^1(x,y)$) pour un cas en 3D

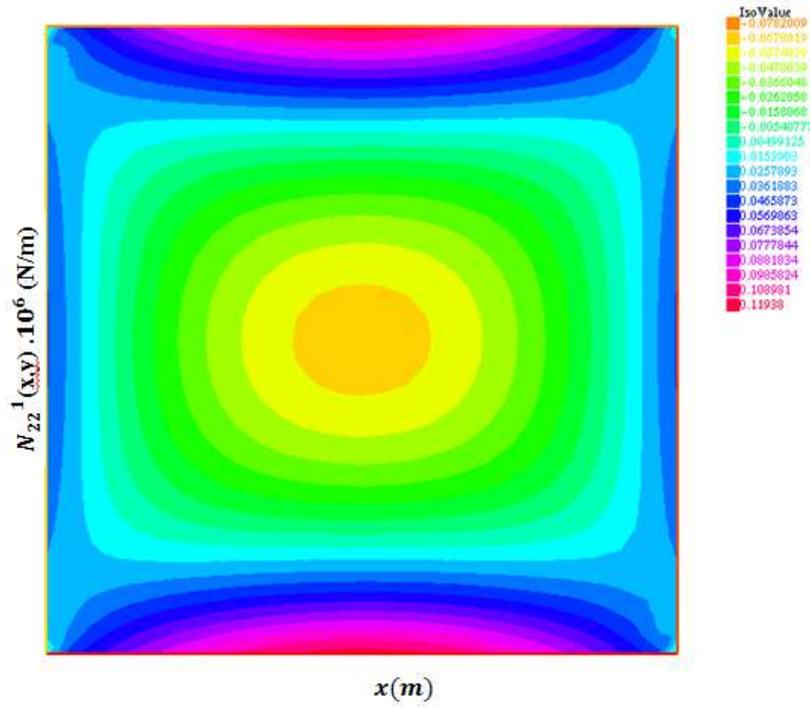


FIGURE 5.37 – Isovaleurs de l'effort normal de la première couche ($N_{22}^1(x,y)$) pour un cas en 3D

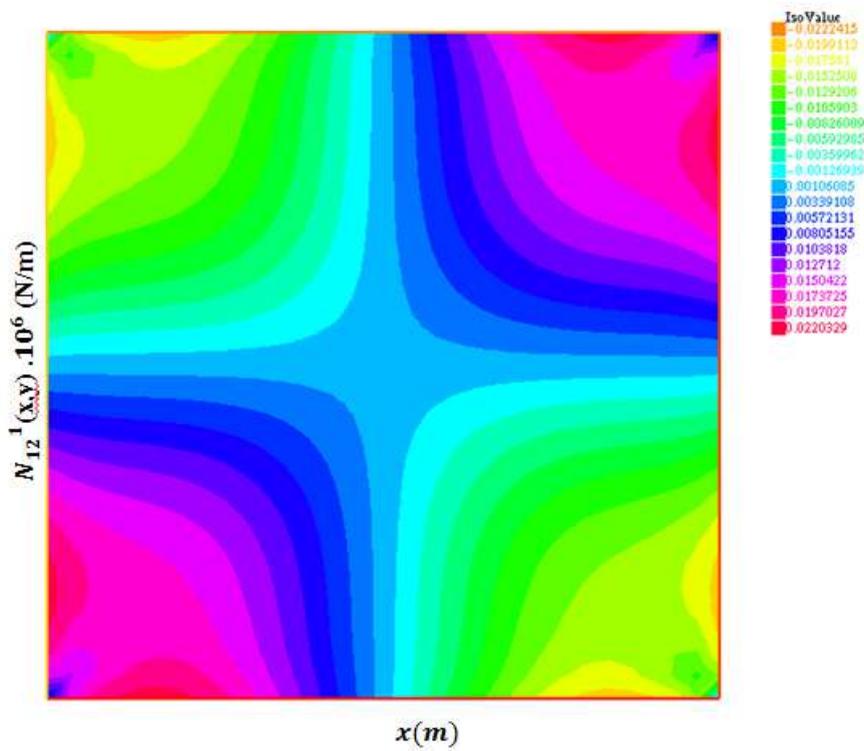


FIGURE 5.38 – Isovaleurs de l'effort normal de la première couche ($N_{12}^1(x,y)$) pour un cas en 3D

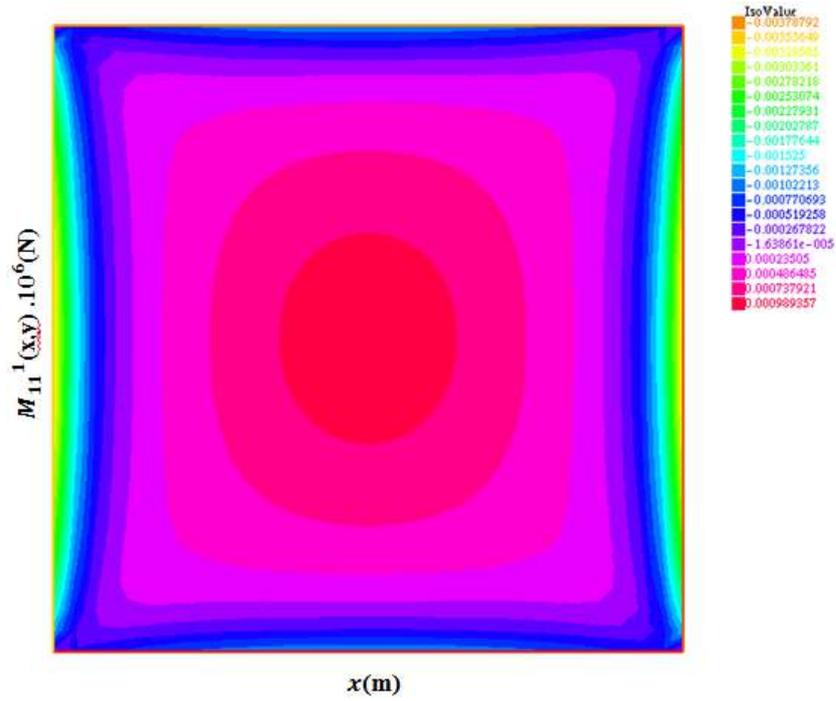


FIGURE 5.39 – Isovaleurs du moment de la première couche ($M_{11}^1(x, y)$) pour un cas en 3D

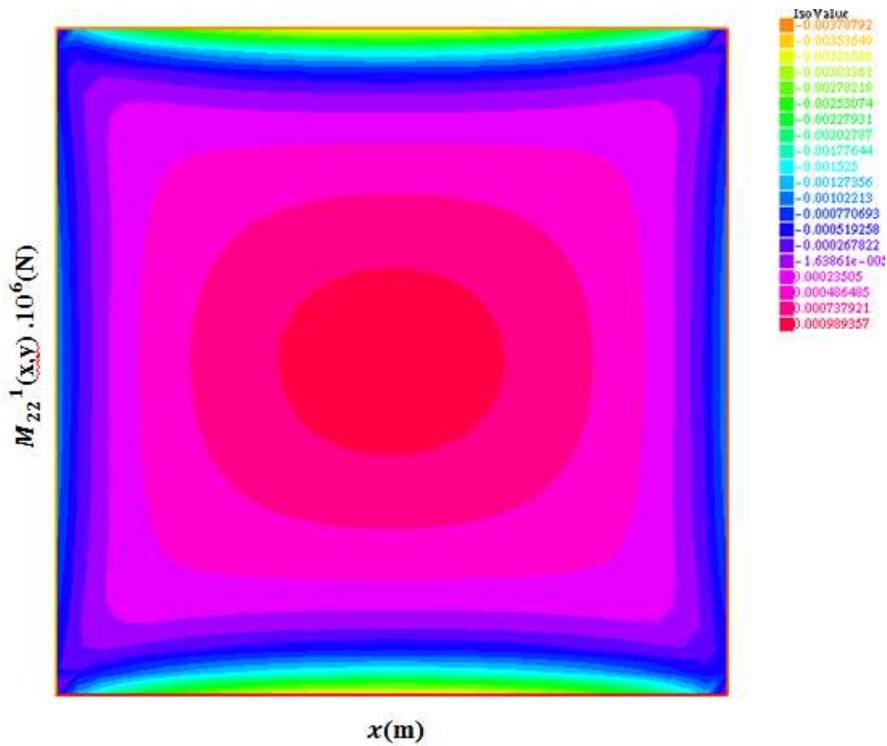


FIGURE 5.40 – Isovaleurs du moment de la première couche ($M_{22}^1(x, y)$) pour un cas en 3D

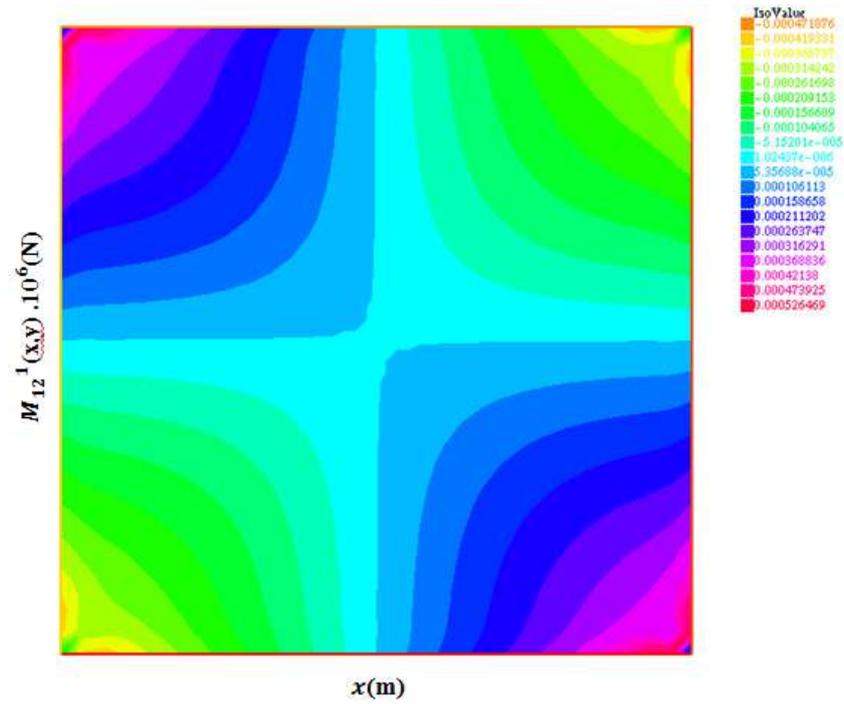


FIGURE 5.41 – Isovaleurs du moment de la première couche ($M_{12}^1(x, y)$) pour un cas en 3D

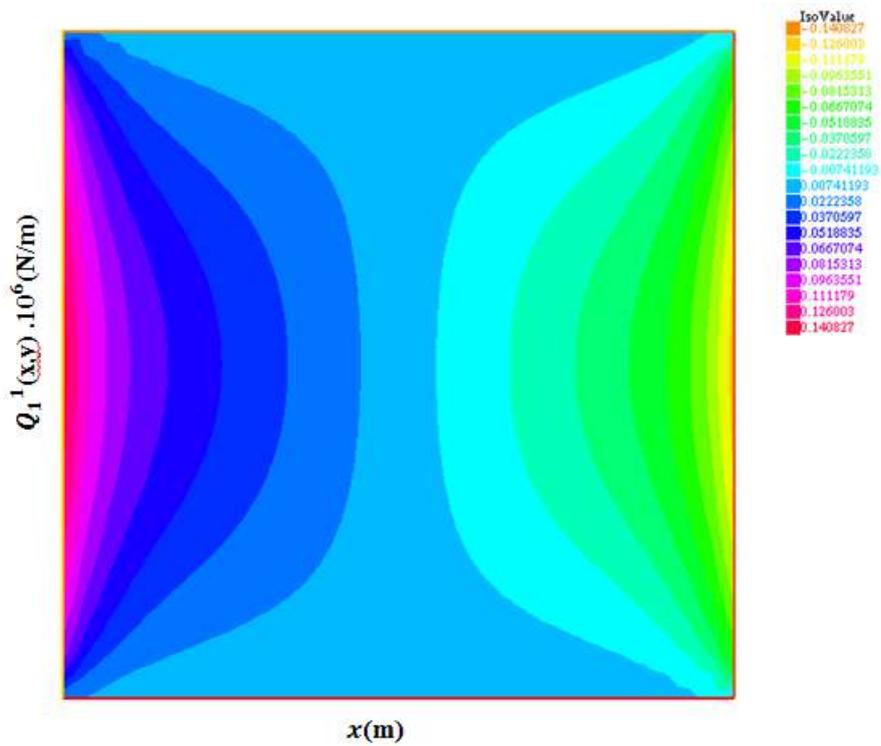


FIGURE 5.42 – Isovaleurs de l'effort tranchant de la première couche ($Q_1^1(x, y)$) pour un cas en 3D

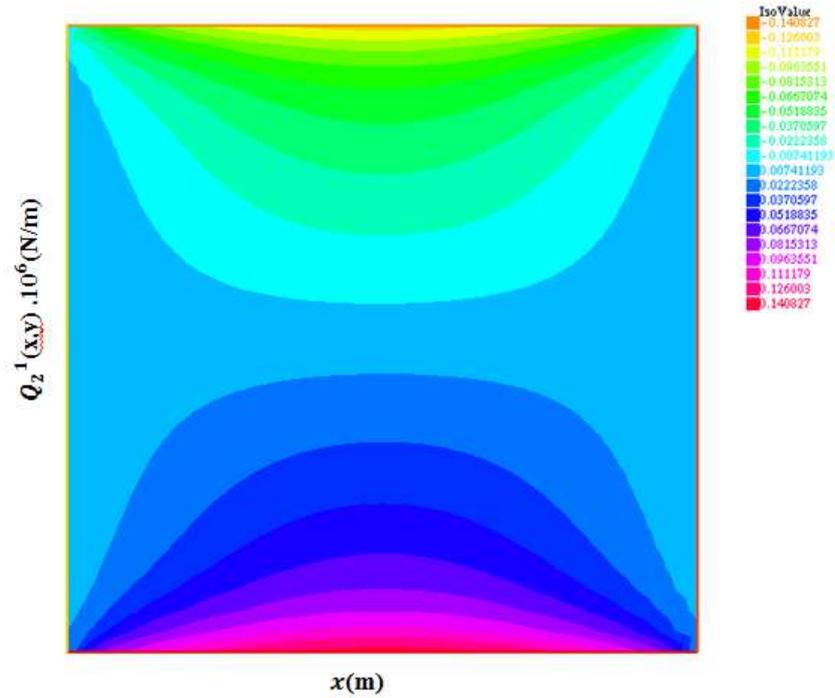


FIGURE 5.43 – Isovaleurs de l'effort tranchant de la première couche ($Q_2^1(x, y)$) pour un cas en 3D

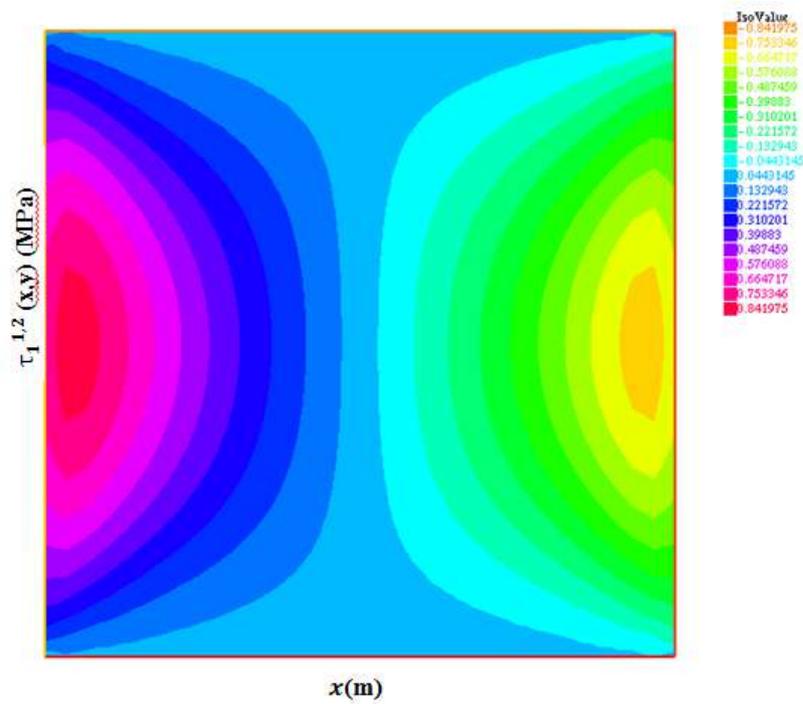


FIGURE 5.44 – Isovaleurs de l'effort d'interface de cisaillement de la première interface ($\tau_1^{1,2}(x, y)$) pour un cas en 3D

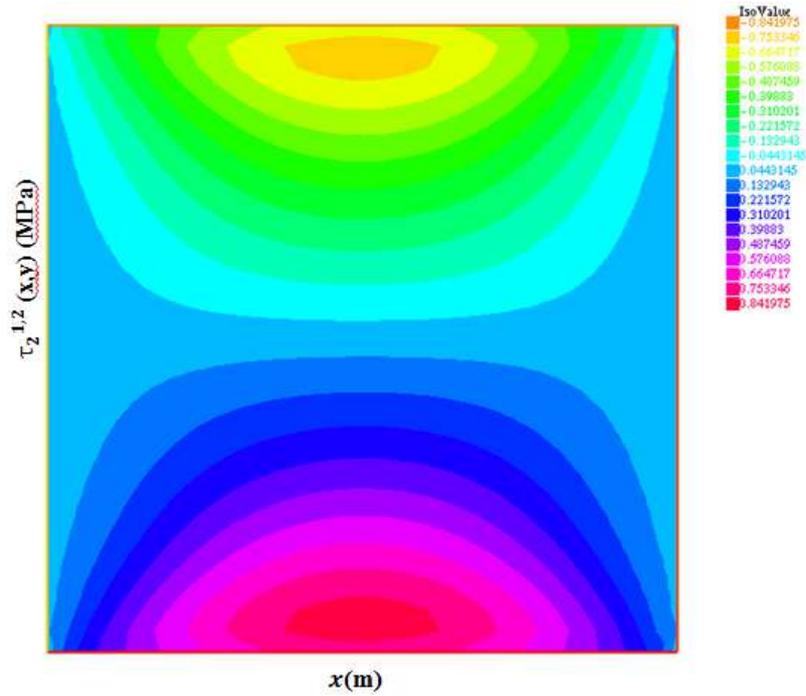


FIGURE 5.45 – Isovaleurs de l'effort d'interface de cisaillement de la première interface ($\tau_2^{1,2}(x, y)$) pour un cas en 3D

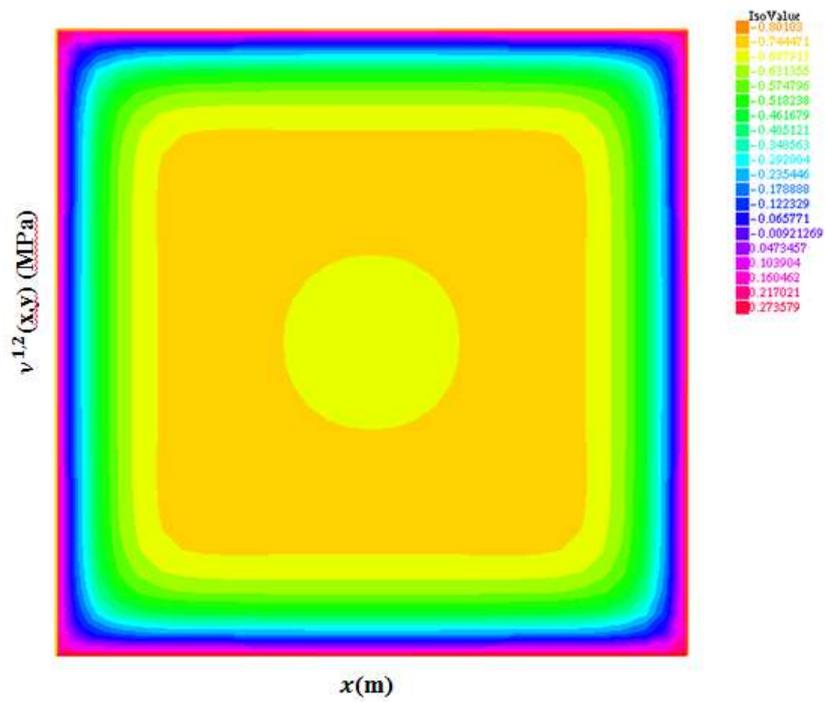


FIGURE 5.46 – Isovaleurs de l'effort d'interface d'arrachement de la première interface ($\nu^{1,2}(x, y)$) pour un cas en 3D

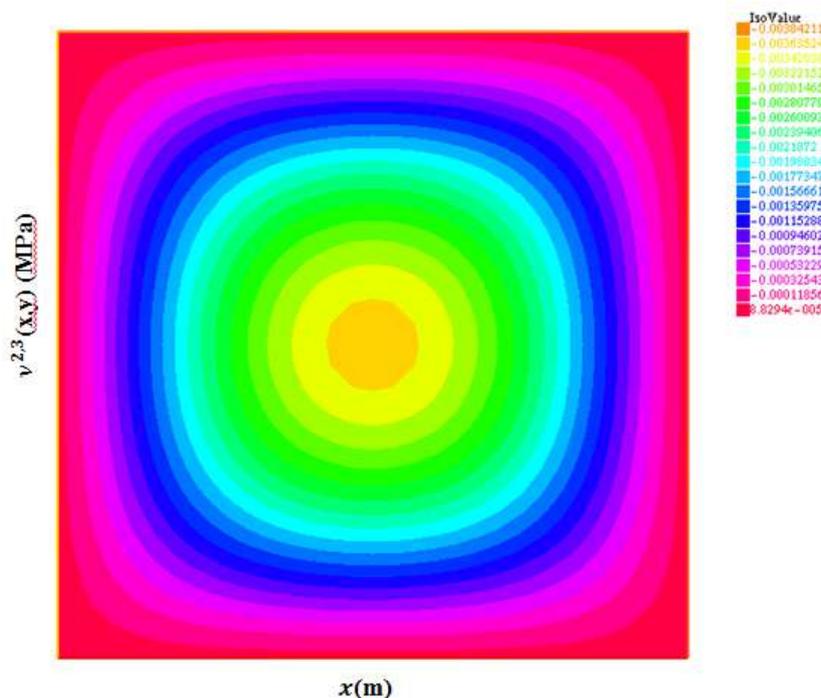


FIGURE 5.47 – Isovaleurs de l’effort d’interface d’arrachement de la deuxième interface ($\nu^{2,3}(x, y)$) pour un cas en 3D

Ces graphes montrent bien que les résultats sont cohérents. On observe bien les symétries et anti-symétries attendus pour chaque champ mécanique ainsi que les symétries attendues entre composantes suivantes : $U_1^i(x, y)$ et $U_2^i(x, y)$, $\phi_1^i(x, y)$ et $\phi_2^i(x, y)$, $N_{11}^i(x, y)$ et $N_{22}^i(x, y)$, $M_{11}^i(x, y)$ et $M_{22}^i(x, y)$, $Q_1^i(x, y)$ et $Q_2^i(x, y)$, $\tau_1^i(x, y)$ et $\tau_2^i(x, y)$.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la résolution du M4-5nW par la méthode des éléments finis mixtes développé dans cette thèse et implémentée dans FreeFem++ a été validée. L’application de l’outil 3D développé (méthode de résolution et script), le M4-5nW EFM (discrétisation 2D), sur un exemple constitué de deux couches de M4-5n avec ressorts de Winkler a permis sa validation par rapport à l’outil M4-5nW DF (discrétisation 1D) en déformations planes développé dans le chapitre 3. L’introduction d’une fissure verticale transversale dans la deuxième couche a montré sa validation sur un cas bicouche fissuré. L’étude de ce cas permet aussi de valider la prise en compte des conditions de symétrie et d’anti-symétrie sur les bords de la structure. La comparaison de la flèche maximale au centre d’un bicouche homogène bi-encastré avec des résultats analytiques ainsi que les courbes d’isovaleurs obtenues par l’outil M4-5nW EFM ont montré sa validation en 3D. Le développement de la méthode éléments finis mixtes et sa validation en déformations planes ont fait l’objet d’une conférence internationale (Nasser et al., 2016b). Ceux en 3D font l’objet d’une proposition d’un article de journal (Nasser et al., 2016a).

L'application de l'outil M4-5nW EFM au cas réel d'une chaussée testée en vraie grandeur fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 6

Apport de l'approche M4-5nW résolu à l'aide d'éléments finis mixtes (EFM) sur un exemple de chaussée réelle

Dans ce chapitre, nous avons appliqué l'outil M4-5nW EFM sur un exemple réel de chaussée fissurée instrumentée et soumise à un essai de fatigue accéléré sur le site IFSTTAR de Nantes. Après description de la machine FABAC, de l'essai FWD (Falling Weight Deflectometer) utilisé pour mesurer les déflexions et de la structure de chaussée testée, nous présentons les modélisations effectuées et la comparaison des résultats avec les mesures FWD réalisées en début et à mi essai (350 000 chargements). Le script M4-5nW EFM est adapté pour prendre en compte les conditions d'essai et étudier différents scénarios d'interprétation (chargement, conditions limites, fissure longitudinale, etc)

6.1 Présentation de la machine FABAC

Les deux machines de fatigue FABAC, FATigue du Béton Armé Continu, sont des petits simulateurs-accélérateurs linéaires de trafic lourd, développés dans le cadre du projet national de recherche FABAC (IREX, 2000). Elles permettent d'étudier, sans réduction d'échelle, le fonctionnement et l'endommagement de chaussées expérimentales circulées par des charges roulantes lourdes, identiques à celles des demis essieux des poids lourds courants. Les essais, réalisés dans des conditions extérieures, sans contrôle de la température, sont effectués indépendamment ou en complément d'expériences réalisées sur le manège de fatigue des structures routières. Elles permettent d'appliquer des charges roulantes jumelées de 30 à 75 kN sur une structure de chaussée expérimentale. Les appuis de la machine sur son support sont suffisamment éloignés de la région de circulation de la charge, afin que leurs effets n'interagissent pas avec ceux des charges roulantes dans cette partie de la chaussée. Des vérins pneumatiques corrigent en continu la distribution des efforts entre les appuis et la charge roulante, afin de maintenir quasi-constante l'effort appliqué à la chaussée dans la zone circulée. Le cadre métallique contenant cet équipement est d'une longueur de 10 mètres permettant d'appliquer la charge sur la piste d'essai sur une longueur de 2 mètres à une vitesse allant de 0.5 à 5 km/h au maximum. Les quatre jumelages sont entraînés l'un après l'autre sur la piste par une chaîne elle-même entraînée par un barbotin de

grand diamètre actionné par un moteur électrique de puissance 35 kWatts (Figure 6.1).

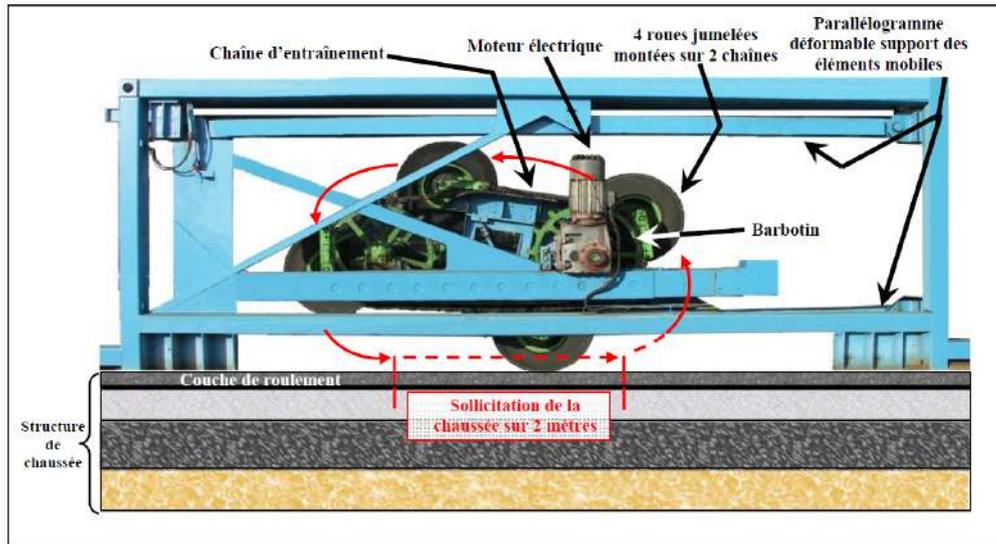


FIGURE 6.1 – Principe de fonctionnement de l'équipement FABAC (Pérez, 2008)

Le fonctionnement des machines FABAC en continu peut se réaliser sous surveillance humaine limitée avec une capacité de chargement hebdomadaire de l'ordre de 300.000 passages. Cet équipement fait partie des moyens d'essais de chargement accéléré pour chaussées dont dispose le département MAST de l'IFSTTAR sur son site de Bouguenais. L'avantage du passage cyclique accéléré est qu'il permet d'appliquer à la chaussée testée environ un million de chargements par mois, ce qui correspond à largement plus d'une dizaine d'années de trafic poids lourds sur chaussées réelles.

Pendant les essais, le comportement de la structure testée est suivi à l'aide d'une instrumentation plus ou moins détaillée, en fonction de la nature et des objectifs de l'expérience. Le fonctionnement simultané des 2 machines facilite l'analyse et l'interprétation des résultats, en permettant la comparaison de deux sections testées sous conditions climatiques et environnementales identiques. Les structures testées sont généralement instrumentées à la construction afin de pouvoir suivre leur évolution. Les paramètres généralement mesurés sont : les déformations longitudinales et transversales dans les couches de chaussée, les températures. D'autres capteurs peuvent être utilisés pour des applications spécifiques : jauges de fissuration, ou encore jauges et capteurs LVDT afin d'instrumenter un dispositif particulier, si le test ne porte pas sur une structure de chaussée.

Les machines FABAC sont utilisées dans plusieurs domaines d'application tels que l'endommagement par fatigue des couches d'assises, le dimensionnement des structures ; l'étude de la durabilité mécanique du collage des revêtements béton sur enrobé (Pouteau, 2004) ; l'étude du comportement des couches d'entretien bitumineuses vis à vis de la remontée des fissures de structures hydrauliques endommagées (Florence, 2005), (Pérez et al., 2007), (Pérez, 2008), (Pérez et al., 2008) ; le développement de nouveaux concepts de matériaux ou structures de chaussées avec en général des partenaires des entreprises privées ; l'étude du comportement des structures de chaussées selon les matériaux utilisés (Hornych

et al., 2008); etc.

6.2 Présentation du FWD

Les essais analysés dans le chapitre par le M4-5nWEFM utilise des résultats d'auscultation de la chaussée par le défléctomètre à masse tombante ou FWD (Falling Weight Deflectometer). C'est un dispositif de contrôle non destructif utilisé pour compléter des tests structurels pour les projets de réhabilitation de la chaussée, la recherche et la détection de défaillance de la structure de la chaussée. Le principe de l'appareil repose sur un choc vertical bref appliqué à la chaussée pour mesurer le bassin des déflexions provoqué par une masse tombante sur un dispositif amortisseur reposant lui même sur la chaussée par l'intermédiaire d'une plaque circulaire de 30 cm de diamètre. Le dispositif amortisseur, composé de blocs de caoutchouc convenablement calibrés, permet d'obtenir un choc ayant sensiblement la forme d'un demi-sinus, et dont la durée varie selon le type d'appareil de 20 à 60 ms. Le défléctomètre se compose d'une remorque tractée de 850 kg environ transportant les éléments de mise en charge avec les neuf capteurs de déplacement et d'un système de pilotage automatique, d'acquisition et de traitement de l'information, embarqué dans le véhicule tracteur (Figures 6.2 et 6.3) (Broutin, 2010).



FIGURE 6.2 – Défléctomètre à masse tombante (FWD)(photo prise à l'IFSTTAR)

Après la mise en station de la remorque au droit du point de mesure, la masse est libérée d'une hauteur pouvant varier de 2 à 40 cm provoquant une force variable de 7 à 135 kN. La hauteur de chute et la force appliquée sont fixées en fonction de la nature de la structure testée. La transmission de la charge se fait par un ressort dont la constante permet de définir la durée du chargement. Les 9 capteurs (géophones dont un est au centre de la plaque) enregistrent la vitesse de déflexion de la chaussée au cours du choc, qui est intégrée pour remonter aux déplacements verticaux et obtenir en fonction du temps le bassin de déflexion sur 2 mètres environ du point d'application de la charge.

Pour les structures routières, les caractéristiques de chargement sont réglées de manière à obtenir une impulsion correspondant à la durée de charge d'un poids lourd (PL) circulant à une vitesse d'environ

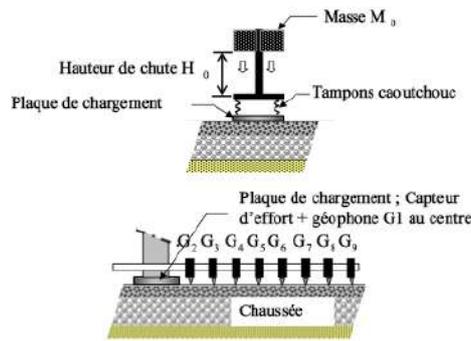


FIGURE 6.3 – Schéma général du FWD : cas de chaussées souples
(Broutin, 2012)

70 km/h. Au droit de chaque station, 9 déflexions sont enregistrées par les 9 capteurs répartis le long d'une poutre. Le premier capteur est situé au centre de la plaque de chargement, et le dernier à 1,80 m environ dans l'axe longitudinal. A ce stade, on dispose de la demi déformée provoquée par un demi essieu standard, ainsi que de tous les paramètres nécessaires à l'exploitation future des résultats.

6.3 Description de l'essai

6.3.1 Chaussée testée, instrumentation et modalité de chargement

Un essai FABAC réalisé sur chaussée bitumineuse en 2016 à l'IFSTTAR a permis d'étudier la remontée de fissure par fatigue dans les couches d'enrobés et d'en identifier les effets à travers une instrumentation intégrée à la structure ainsi qu'à travers des campagnes de mesure FWD. La structure testée (Figure 6.4) comporte deux couches d'EME2 (enrobé à module élevé de classe 2).

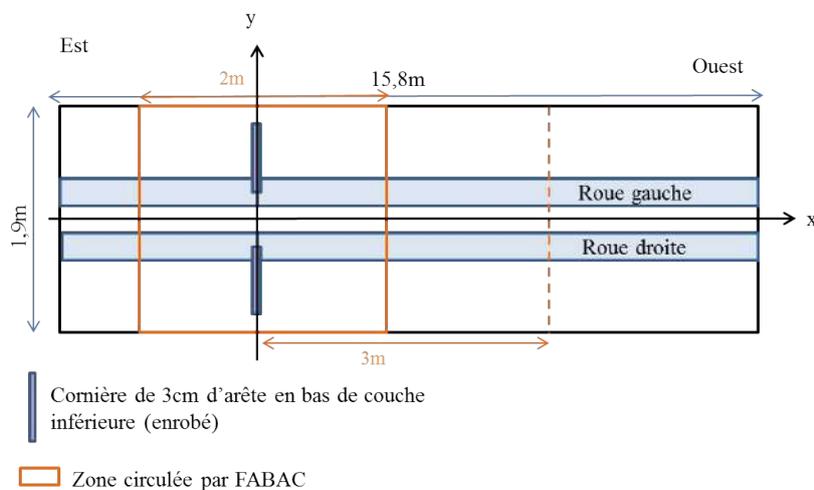


FIGURE 6.4 – Plan de la planche expérimentale avec défauts

Les matériaux sont caractérisés en laboratoire par des essais de fatigue et de module complexe, réalisés sur des matériaux prélevés sur chantier, lors de la mise en œuvre des enrobés. L'essai est réalisé en période "froide" (entre la fin de l'automne et le début du printemps), pour limiter les phénomènes d'orniérage, qui sont accentués avec les machines FABAC (qui appliquent un trafic canalisé, à vitesse lente). Les charges appliquées sont des demi-essieux "standards" à roues jumelées, chargées au total pour les deux roues à 65 kN. La vitesse de chargement est d'environ 1 m /seconde. A cette vitesse, les machines FABAC permettent d'appliquer environ 40 000 chargements par jour, soit environ 1 million de chargements (arrêts compris) par mois. La planche d'essai a une longueur de 5 m et une largeur de 2 m. La zone circulée par les demi-essieux a une longueur de 2m.

Le nombre de chargements appliqué est de 1 million. Un défaut initial est créé à la base de la couche de fondation au centre de la planche afin d'initier et localiser dans cette zone sur laquelle l'instrumentation a été focalisée. Ce défaut est réalisé à l'aide de deux plaques métalliques (cornière), placées dans le sens transversal sous le passage des roues (Figure 6.5).

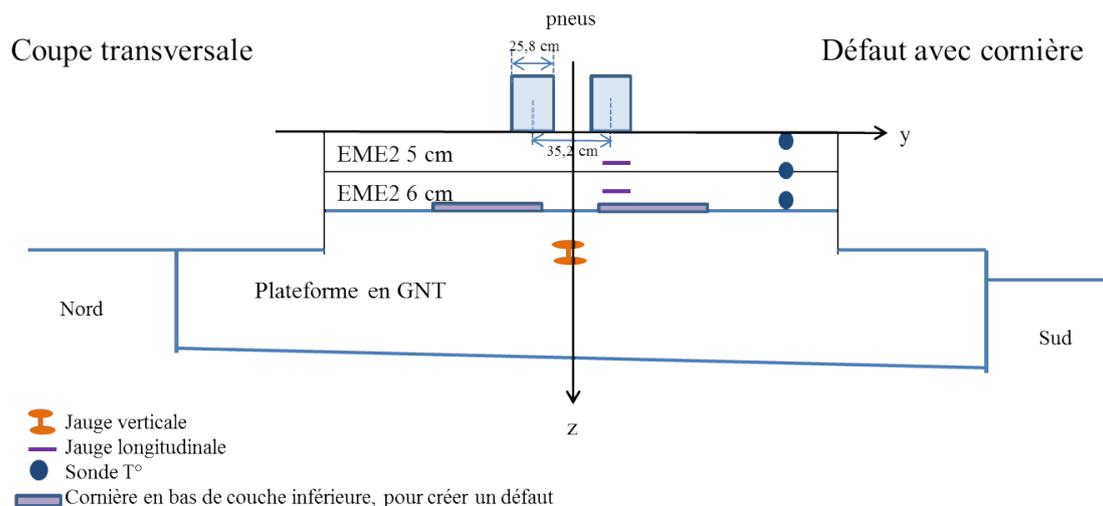


FIGURE 6.5 – Coupe transversale de la structure étudiée

La coupe transversale de la planche montre le plan d'instrumentation de la structure qui comprend :

- 2 jauges de déformations verticales, placées en partie supérieure du sol support, dans le plan de symétrie longitudinal de la planche
- 4 jauges de déformation horizontales (2 longitudinales placées à la base de chacune des couches bitumineuses)
- 3 sondes de température, placées près de la surface, à mi-hauteur et à la base des couches bitumineuses. Les mesures de température sont réalisées de façon continue pendant toute la durée de l'expérience (intervalle de mesure de 15 minutes).

6.3.2 Campagnes d'auscultation FWD

Des essais FWD sont réalisés sur la planche avant le démarrage des chargements, à mi-expérience (vers 350 000 chargements), et à la fin de l'expérience (Figure 6.6). La charge tombante appliquée est égale à 65 KN avec une "fréquence équivalente" égale à 35Hz. La température extérieure relevée au cours de ces mesures est donnée dans la tableau 6.1. Ces campagnes de mesure effectuées avec des pas de chargement de 10 cm très rapprochés donc par rapport à l'utilisation usuelle du FWD (de l'ordre de 3m).

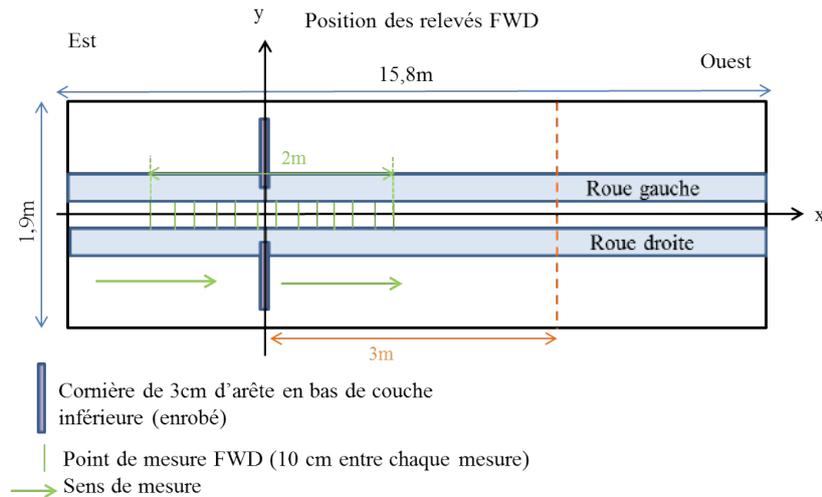


FIGURE 6.6 – Position des relevés FWD

TABLE 6.1 – Température à l'extérieur des essais FWD

Température à l'extérieur (°C)	Essai 1 (0 cycle)	Essai 2 (350 000 cycles)
Planche EME2/EME2	11.8	14.2

La figure 6.7 montre la déflexion sous le capteur central G1 (sous la charge) au pas de 10cm à partir de $x > 0$ (cornières) à 0 et 350 000 cycles.

Les mesures obtenues à 350 000 cycles présentent deux caractéristiques par rapport aux mesures à 0 cycles : l'une est une augmentation générale du niveau de déflexion de $50\mu m$ environ sur l'ensemble de la zone circulée par la machine FABAC ; l'autre est un effet "chapeau" centré sur les cornières (plus nettement visible sur l'ensemble des mesures en faisant abstraction de la symétrie).

Afin de retrouver ces effets, nous avons appliqué l'outil de calcul M4-5nW EFM à l'essai et nous avons testé trois scénarios de fissuration possibles détaillés plus loin.

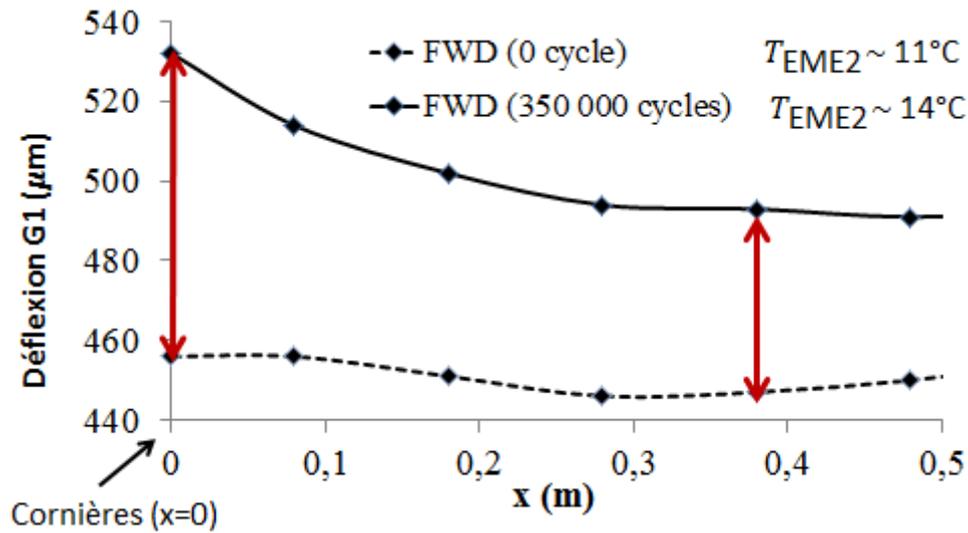


FIGURE 6.7 – Déflexion sous la charge au pas de 10cm à 0 et 350 000 cycles

6.4 Application de l'outil de calcul M4-5nW EFM à l'essai

6.4.1 Mise en données du problème

Le maillage M4-5n utilisé a pour dimension dans le plan horizontal $L_x = 6m$, $L_y = 1.9m$. La structure testée est considérée comme un bi-couche M4-5n homogène (à la fissuration près) d'épaisseur totale égale à 0.11m mais dont nous positionnons l'interface en fonction de la fissuration et non nécessairement en coïncidence avec l'interface physique des deux couches d'EME2. Les épaisseurs initiales pour la chaussée initiale non fissurée (et pour laquelle on néglige l'effet des cornières) sont prises égales à $e^1 = 0.05m$ et $e^2 = 0.06m$. Le sol n'est ici modélisé qu'aux travers de ressorts de Winkler dont la rigidité est déterminée plus loin.

6.4.2 Matériaux

Comme rappelé très succinctement dans le premier chapitre bibliographique de cette thèse, dans la littérature les mélanges bitumineux sont considérés dans le domaine des petites déformations ($< 10^{-4}$) comme des matériaux isotropes, viscoélastiques linéaires et thermosusceptibles (Corté and Di Benedetto, 2005), (Di Benedetto and Corté, 2005). En effet, leurs propriétés mécaniques dépendent fortement de la température : à basse température l'enrobé présente une rigidité élevée et tend vers un comportement de type fragile ; à haute température sa rigidité chute fortement et présente une déformabilité viscoplastique importante, condition propice à l'orniérage. Plusieurs modèles rhéologiques permettent de prendre en compte le comportement viscoélastique des enrobés bitumineux dans les domaines temporel et fréquentiel. L'identification des paramètres est souvent effectuée à partir de campagnes de mesure de module complexe en faisant varier température et fréquence de sollicitation.

Parmi ces modèles, nous avons utilisé le modèle de Huet-Sayegh (Huet, 1963), (Sayegh, 1963), (Sayegh,

1965), (Huet, 1999) pour identifier les paramètres viscoélastiques de l'EME2 à partir des mesures de module complexe réalisées à l'IFSTTAR. Celui-ci nous a permis de calculer le module d'Young équivalent associé aux mesures FWD et considéré égal à la norme du module complexe calculé à 35 Hz et pour les températures du tableau 6.1. On obtient en l'occurrence une valeur de module d'Young égal à 14000 MPa.

6.4.3 Conditions limites du modèle non fissuré

Comme la structure testée est symétrique par rapport à (O,x,z) et (O,y,z) , nous avons modélisé le quart seulement (partie hachurée de la Figure 6.8). Nous avons défini quatre bords (1,2,3 et 4) et nous avons imposé des conditions limites pour chaque bord et chaque couche ($i \in \{1, 2\}$).

- Bord 1 : conditions qui prennent en compte la symétrie par rapport à (O,x,z) ($U_2^i(x, 0) = 0$, $\phi_2^i(x, 0) = 0$, $Q_2^i(x, 0) = 0$)
- Bord 2 : conditions d'encastrement ($U_1^i(L_x/2, y) = 0$, $U_2^i(L_x/2, y) = 0$, $\phi_1^i(L_x/2, y) = 0$, $\phi_2^i(L_x/2, y) = 0$, $U_3^i(x, y) = 0$)
- Bord 3 : conditions d'encastrement ($U_1^i(x, L_y/2) = 0$, $U_2^i(x, L_y/2) = 0$, $\phi_1^i(x, L_y/2) = 0$, $\phi_2^i(x, L_y/2) = 0$, $U_3^i(x, y) = 0$)
- Bord 4 : Quand le centre de la charge x_c est positif ($\forall y_c$), deux calculs sont effectués (cf. section 4.4.5) : pour le premier, on impose des conditions de symétrie par rapport à (O,y,z) ($U_1^i(x, y) = 0$, $\phi_1^i(x, y) = 0$, $Q_1^i(x, y) = 0$) et pour le deuxième, des conditions d'antisymétrie par rapport à (O,y,z) ($U_3^i(0, y) = 0$, $N_{11}^i(0, y) = 0$, $M_{11}^i(0, y) = 0$)

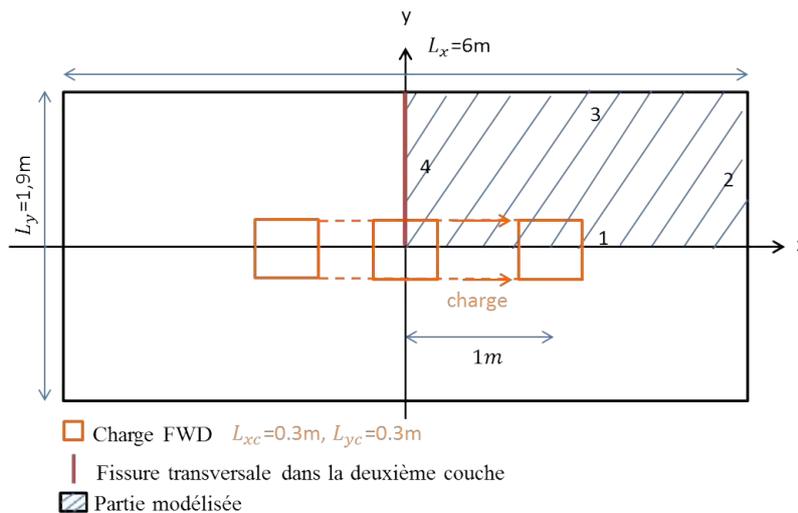


FIGURE 6.8 – Structure modélisée

6.4.4 Prise en compte des chargements FWD pour un pas de mesure

Les conditions de chargement pour le M4-5n correspondent aux efforts appliqués en faces supérieure et inférieure du bicouche à l'exception près de l'effort normal imposé par les ressorts de Winkler et sont donc données par les équations : $\tau_1^{0,1} = 0$, $\tau_2^{0,1} = 0$, $\nu^{0,1} = -q_c$ sous l'empreinte FWD et 0 ailleurs, $\tau_1^{2,3} = 0$, $\tau_2^{2,3} = 0$.

Parmi celles-ci, seul l'effort non nul de la charge tombante apparait dans la fonctionnelle. Nous ne considérons ici que la valeur maximale de charge obtenue au cours du rebond FWD (65KN) en effectuant un calcul statique qui néglige les forces d'inertie.

La résultante de 65KN est ramenée à une pression constante sur une surface carrée $L_{xc} = L_{yc} = 0.3m$ de valeur $q_c = 0.72MPa$. La charge est appliquée au centre de la chaussée pour x_c variant entre $0 \leq x_c \leq +1m$ (Figure 6.8) par pas $\Delta x = 0.05m$. Pour ce faire, nous avons introduit une boucle dans FreeFem++ englobant notre script initial à position de charge donnée et conduisant à réeffectuer automatiquement la procédure de calcul pour chaque position de charge avec remaillage permettant de tenir compte du contour exact de q_c (Figure 6.9). Comme indiqué au chapitre 4, cette procédure inclut un ou deux calculs selon la position de charge par rapport à l'axe de symétrie (O,y).

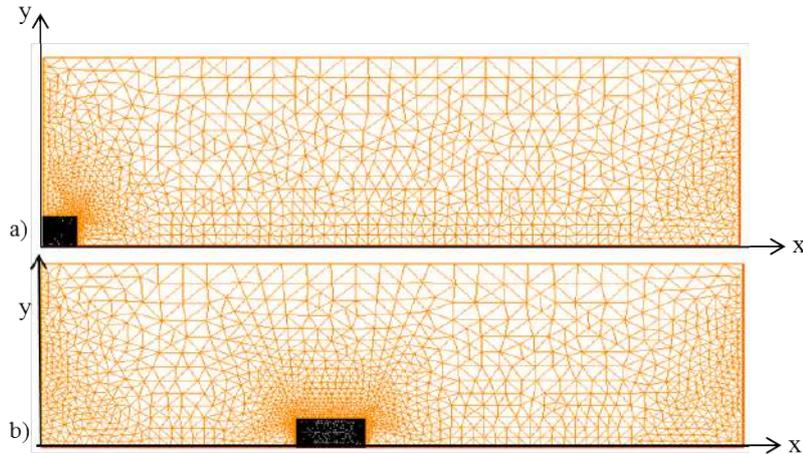


FIGURE 6.9 – maillage de la structure modélisée (quart de la structure testée, FWD) : a) charge au centre ; b) charge pour $x_c = 1m$

6.4.5 Prise en compte de fissures transversale et longitudinale à mi-essai

Trois scénarios sont envisagés par la suite pour rendre compte des mesures FWD obtenues à 350 000 chargements. Le premier consiste à considérer le bicouche fissuré transversalement dans le plan de symétrie $x=0$ (plan des cornières) sur toute sa largeur L_y et sur une hauteur constante h_f , à partir du bas, égale à 3 ou 5cm. Ce scénario est réalisé en imposant l'épaisseur de la couche du bas $e^2 = h_f$

et par conséquent celle de la couche du haut $e^1 = 0.11 - h_f$.

Conformément à la section 4.4.2, pour introduire cette fissure, il faut imposer les conditions de bord libre $N_{11}^2(x, y) = 0$, $M_{11}^2(x, y) = 0$ et $Q_1^2(x, y) = 0$ sur le bord 4 de la deuxième couche par pénalisation.

Le deuxième scénario consiste à garder l'hypothèse de la présence d'une fissure transversale dans le plan de symétrie sur toute la largeur de la deuxième couche et à faire varier la rigidité de la première couche de la structure. On considère que le module d'Young de cette couche est inférieur à celui de la deuxième couche ($E^1 = 12500MPa < E^2 = 14000MPa$). Ce choix est dû au fait que l'essai à 350 000 cycles est réalisé dans une période où la température à l'extérieur est plus élevée (Tableau 6.1) et comme les matériaux utilisés dans cet essai sont thermosusceptibles, cette augmentation de température va se traduire par une diminution de rigidité de la première couche.

Le troisième scénario comporte en complément du scénario 1, une fissure longitudinale tout du long de l'axe de symétrie (O,x). Celle-ci supposée de même hauteur h_f de la fissure transversale (il aurait été possible de prendre une valeur différente et de la raccorder continument à la fissure transversale en affectant à la couche 2 une épaisseur variable). On introduit alors également les conditions de bord libre $N_{22}^2(x, y) = 0$, $M_{22}^2(x, y) = 0$ et $Q_2^2(x, y) = 0$ sur le bord 1.

Les cornières sont modélisées comme étant des fissures transversales existantes sur toute l'épaisseur de la deuxième couche. Pour cela, nous avons introduit une fissure transversale dans la deuxième couche en $x=0$ représentée par la cornière dans la Figure 6.8. La longueur de la fissure est égale à la largeur L_y de la structure modélisée. Une étude paramétrique est réalisée plus tard pour choisir la hauteur de la fissure.

6.4.6 Comparaison des résultats du M4-5nW EFM avec les mesures de déflexion FWD

Détermination de la raideur du sol sur structure non fissurée

Après l'adaptation du script M4-5nW EFM pour modéliser l'exemple étudié, nous avons réalisé une étude paramétrique afin de trouver la raideur des ressorts de Winkler (k) modélisant le sol. Tout d'abord, nous avons modélisé l'essai FWD pour une structure non fissurée et nous avons comparé les résultats obtenus avec ceux issus du premier essai FWD (structure neuve avant application de charges FABAC). L'ajustement conduit à une raideur de ressorts $k = 150MPa/m$ donnant une déflexion maximale $U_3^1(0, 0) = 452\mu m$ pour $456\mu m$ mesurée sous la charge. A titre informatif, cela correspond d'après l'équation 3.2 à une plateforme semi infinie homogène de portance $E^s = 75MPa$, qui est de l'ordre de grandeur de la valeur mesurée directement par essai à la plaque dynamique en sommet de GNT avant mise en oeuvre des enrobés.

Cas de la chaussée neuve

Le script avec déplacement de charge permet de simuler l'ensemble de la campagne FWD réalisé à 0 cycle. La Figure 6.10 qui représente la déflexion sous charge en fonction de sa position de FWD montre, comme attendu dans ce cas, une réponse constante du M4-5n (courbe rouge). On peut observer que celle-ci est proche des mesures à 0 cycle (courbe noire en trait discontinu).

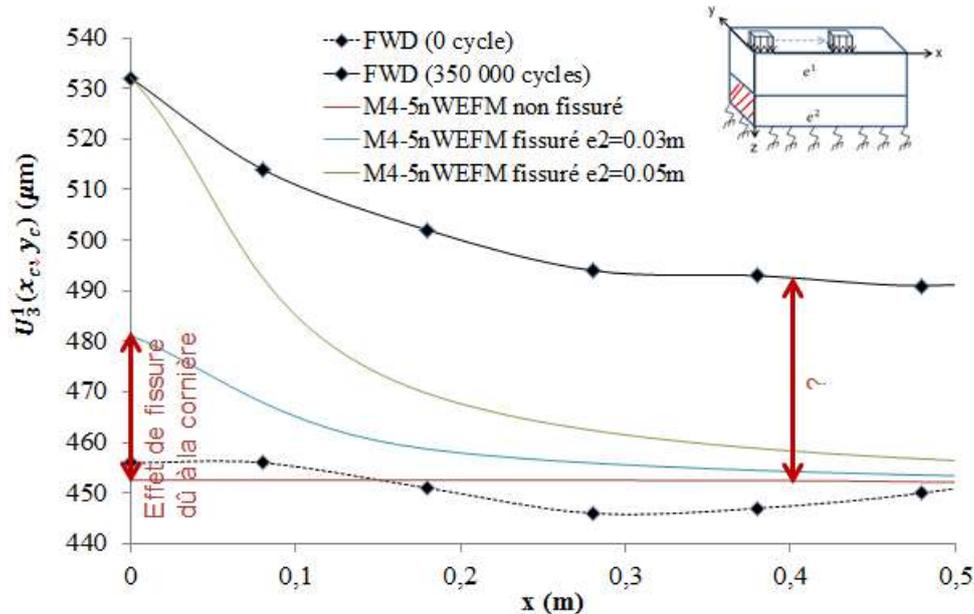


FIGURE 6.10 – Comparaison des résultats de la structure non fissurée et fissurée avec différentes hauteurs de fissure ($e^2 = 0.03\text{m}$, $e^2 = 0.05\text{m}$)

Résultats du scénario 1 sur chaussée à 350 000 cycles

Les mesures obtenues à 350 000 cycles sont également représentées sur la Figure 6.10. Afin de retrouver l'augmentation générale du niveau de déflexion et l'effet "chapeau" centré sur les cornières, nous avons essayé dans un premier temps de les interpréter par une fissure verticale transversale (T), qui se serait développée dans le plan des cornières (scénario 1). Nous avons testé deux épaisseurs différentes : $h_f = 0.03\text{m}$ (courbe bleue de la figure 6.10) et 0.05m (courbe verte de la Figure 6.10). On observe que ces courbes rendent bien de l'effet "chapeau" mais pas de l'augmentation générale du niveau de déflexion. Pour $h_f = 0.05\text{m}$, on retrouve la valeur maximale de déflexion mesurée par FWD. Ces résultats montrent bien l'effet de l'assouplissement local de la structure provoqué par la fissure.

Résultats du scénario 2 sur chaussée à 350 000 cycles

L'augmentation générale du niveau de déflexion fait penser dans un premier temps à une modification de portance du sol liée par exemple à une modification de son état hydrique entre les deux campagnes de mesures FWD. Néanmoins, plusieurs indices ont conduit à écarter cette hypothèse, notamment le fait que la zone affectée par l'augmentation de déflexion se limite à la zone circulée par FABAC. Nous nous

sommes donc plutôt intéressés au scénario 2 consistant à combiner la présence d'une fissure verticale transversale dans le plan des cornières (scénario 1) et à réduire la rigidité de la première couche à cause de l'augmentation de la température extérieure (Tableau 6.1). On trouve qu'une épaisseur $h_f = 0.03m$ et un module d'Young $E^1 = 12500MPa$ (courbe violette de la Figure 6.11) donne à la fois l'effet "chapeau" et l'augmentation générale de la déflexion.

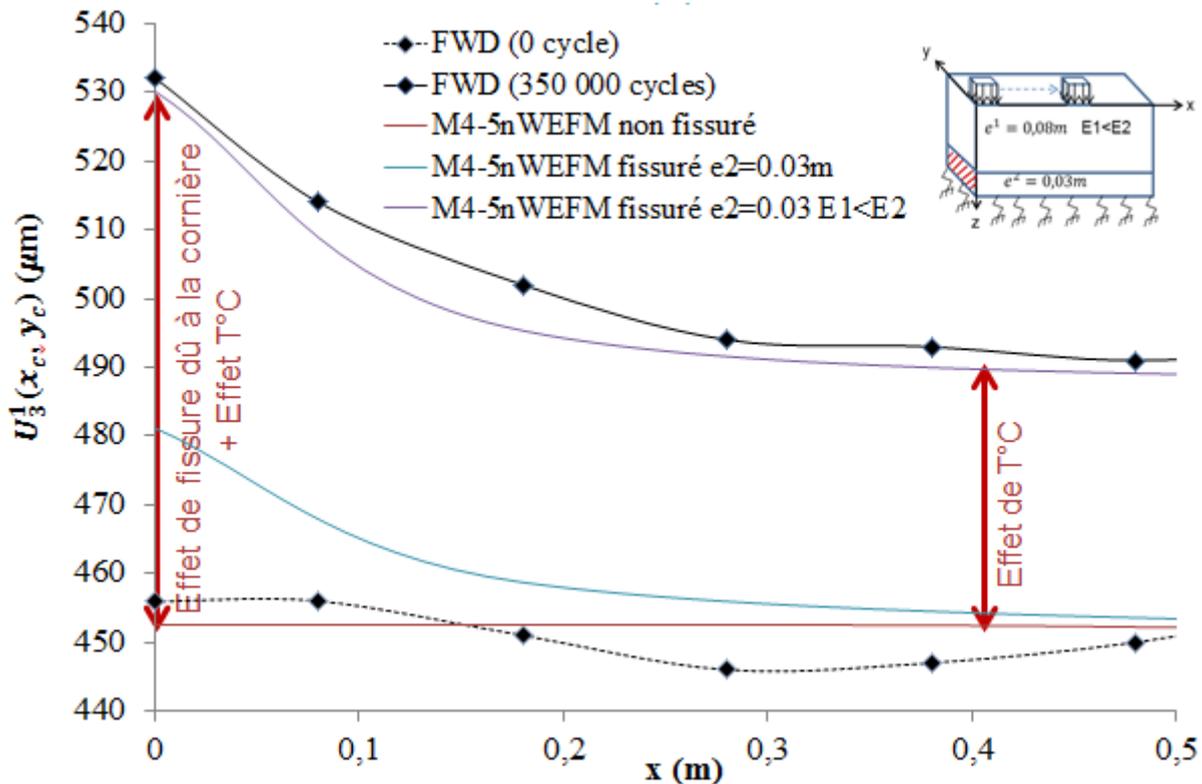


FIGURE 6.11 – Effet de l'introduction d'une fissure transversale avec réduction de la rigidité de la première couche ($e^2 = 0.03m$, $E^1 = 12500MPa$)

Résultats du scénario 3 sur chaussée à 350 000 cycles

Dans ce scénario, nous avons négligé l'effet de la température (scénario 2) et nous nous sommes intéressé à introduire une fissure (L) supplémentaire dans le plan de symétrie longitudinale de la structure. Nous avons considéré que la hauteur h_f des fissures longitudinale et transversale est égale à $0.03m$. On obtient la courbe orange de la Figure 6.12 qui permet effectivement de retrouver les deux effets recherchés.

D'après l'étude de ces trois scénarios, on peut considérer que les scénarios 2 et 3 sont plausibles mais il faut d'autres mesures de champs mécaniques, que nous n'avons pas durant la thèse, pour pouvoir les discriminer et tirer une conclusion sur l'endommagement (fissuration) qui se produit dans la chaussée. Par contre, cette étude nous a permis de montrer la pertinence de l'outil développé "M4-5nW" pour prendre en compte ces différents scénarios.

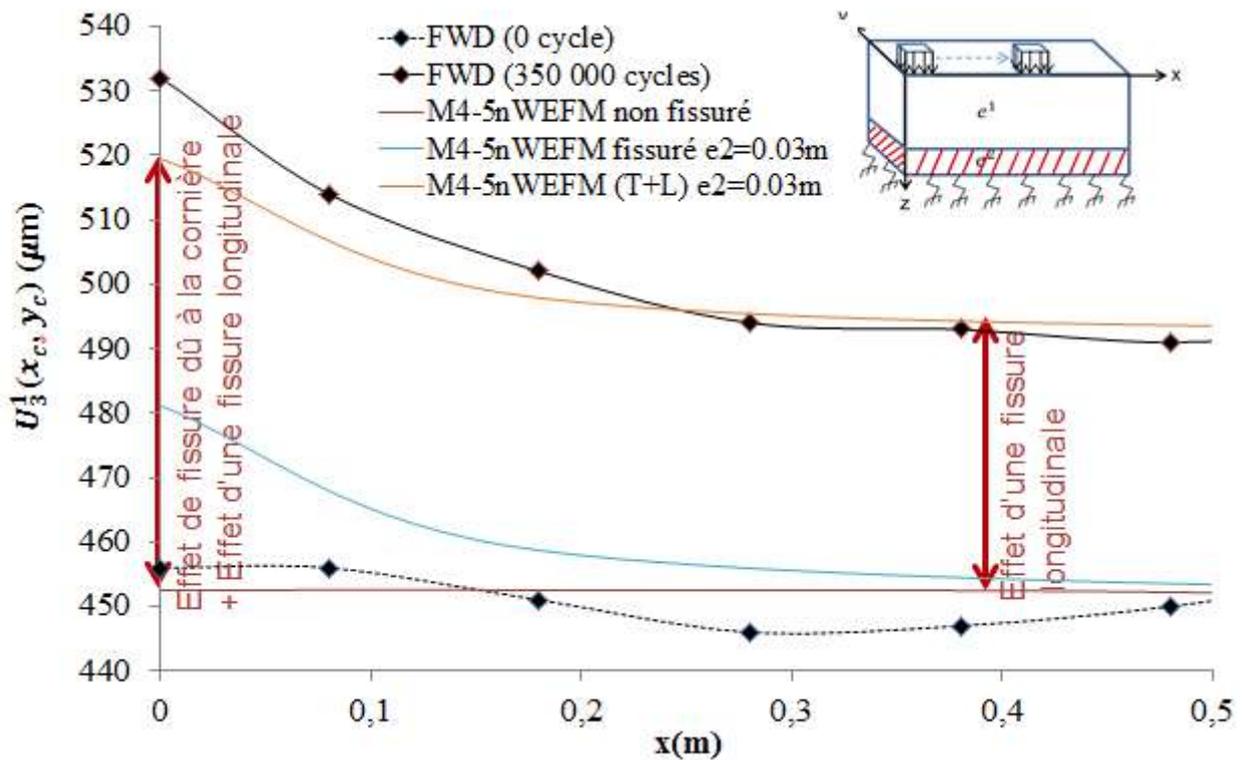


FIGURE 6.12 – Effet de l'introduction d'une fissure longitudinale (L) à une fissure transversale (T) ($e^2 = 0.03\text{m}$)

6.5 Conclusion

L'outil EF développé dans le chapitre 4 (M4-5nW EFM) nous a permis de modéliser la réponse de la structure FABAC considérée ici et d'examiner différents scénarios de fissuration à l'issue des cycles de chargement de fatigue. La comparaison entre modèle théorique M4-5nW (résolu à l'aide d'EF mixtes) et mesures montre en premier lieu la pertinence de cet outil à l'application de cas de chaussées réelles. Pour la chaussée neuve, on a notamment retrouvé par analyse inverse le niveau de portance de la plateforme FABAC mesurée par essai à la plaque. Les scénarios avec fissuration permettent d'apporter des explications plausibles aux évolutions de déflexion mesurées par FWD lors de campagne d'essais réalisés à 0 et 350 000 cycles.

Pour discriminer les différents scénarios, il sera utile par la suite du projet FABAC d'analyser les autres mesures de ces essais. Cette étude pourra donc être largement complétée en exploitant les mesures de déformation données par les jauges implantées dans la chaussée.

Bien entendu, il sera très intéressant d'autopsier la structure une fois l'essai complètement achevé, afin de déterminer la véritable nature des désordres apparus dans cette structure par fatigue mécanique.

Conclusion et Perspectives

Les chaussées sont des structures multicouches qui subissent des sollicitations liées au trafic et au climat conduisant à leur dégradation, par fissuration ou décollement d'interfaces notamment. La gestion de ce patrimoine vieillissant demande à développer des outils performants d'évaluation *in situ* de l'état des chaussées et de prévision de leur évolution en l'absence ou présence de travaux d'entretien.

Les travaux conduits dans cette thèse s'inscrivent dans ce contexte et ont consisté à développer un outil de calcul de chaussées élastiques 3D à état de fissuration donné, sans prise en compte à ce stade de phase de propagation. Le modèle choisi pour construire l'outil est le Modèle Multiparticulaire des Matériaux Multicouches à $5n$ (n nombre total de couches) équations d'équilibre, le M4- $5n$.

Les développements ont porté sur le développement de méthodes numériques pour la résolution du M4- $5n$ avec discontinuité(s). La première étape a consisté à finaliser des travaux antérieurs utilisant la méthode de résolution par différences finies (discrétisation linéique) du M4- $5n$ en déformations planes avec modélisation du sol par ressorts de Winkler éventuellement surmontés d'une couche de "cisaillement" (avec module calculé par la formule d'Odemark).

Nous nous sommes attaché ensuite à développer une méthode générale et systématique de résolution du M4- $5n$ 3D par éléments finis mixtes (discrétisation 2D), basée sur la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner exprimée en champs généralisés. La formulation a été implémentée dans un script FreeFem++ et validée par référence à la résolution par différences finies (discrétisation 1D) et à une solution analytique de plaque en flexion dans les deux directions x , y .

Nous avons montré en fin de mémoire la pertinence de l'approche M4- $5n$ 3D appliquée au cas réel d'une chaussée soumise en vraie grandeur à un essai de fatigue accéléré (à l'aide d'une machine FABAC). Le modèle a permis d'avancer des scénarios de fissuration permettant de rendre compte des mesures de déflexion de la chaussée (par auscultation non destructive FWD) effectuées avant et après cycles d'endommagement.

Ce travail débouche sur deux perspectives principales au regard des enjeux qui ont motivé la thèse.

La première à se dessiner est l'extension de l'outil EF mixte présent pour la modélisation de la propagation de (multi) fissure(s) par fatigue. Cet objectif soulève en lui même de nombreux points techniques à traiter parmi lesquels :

- implémentation dans FreeFem++ des conditions limites relatives au décollement d'interface partiel ou non (cf. chapitre 4)
- prise en compte des chargements thermiques (chaussées béton par exemple)
- positionnement de fissures verticales hors plans de symétries et éventuellement dans des plans obliques ($ax+by=c$) avec front de fissure à hauteur variable $e(x,y)$ et introduction de couches M4-5n correspondantes
- écriture de critères locaux de propagation de fissures ou décollement d'interface (de type loi de Paris ou autre) fonction de la valeur des champs généralisés d'interface ($\tau_\alpha^{i,i+1}$ et $\nu^{i,i+1}$) situés au niveau du front de fissure entre les couches i et $i+1$ (Chabot et al., 2013),(Caron et al., 2006)
- gestion des branchements éventuels entre fissures de couche et décollement d'interface ou *vice versa* (cf. Figure 1.6)
- calage des lois de fissuration en fatigue à partir d'essais de laboratoire (à petite échelle et échelle intermédiaire) ou d'essais accélérés en vraie grandeur et de leur modélisation et de leur interprétation par le M4-5n
- écriture et implémentation d'un algorithme incrémental d'avancée de front de fissure
- développement d'un environnement ergonomique pour la mise en donnée et l'exploitation des résultats du logiciel ; implantation sur serveur de calcul.

L'autre voie de réflexion à poursuivre concerne l'utilisation même d'un tel logiciel, supposé étendu suivant les points précédents, au sein d'une chaîne d'outils de gestion d'un patrimoine routier :

- aide à l'interprétation locale des essais d'auscultation
- étude et comparaison des scénarios probables d'évolution de dommage à structure donnée (cf. Figure 1.6)
- estimation de durée de vie résiduelle en l'absence de travaux d'entretien
- prise en compte des travaux et estimation de nouvelle durée de vie

Ce type d'analyse mécanique à échelle locale de quelques mètres pourrait venir en appui des approches statistiques à grande échelle plus généralement mise en œuvre pour le suivi des réseaux routiers suivant une méthodologie restant également à définir.

Bibliographie

- I. Al-Qadi, T. Scarpas, and A. Loizos. *Pavement Cracking : Mechanisms, Modeling, Detection, Test and Case Histories - 6th RILEM Conference on Cracking in Pavements*. CRC Press Balkema, Chicago, USA, June 2008.
- P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(3) :353–375, 1991.
- I. Babuska and J.M. Melenk. The partition of unity method. *International journal for numerical methods in engineering*, (40) :727–758, 1997.
- J. Baek and Imad I. Al-Qadi. Finite element method modeling of reflective cracking initiation and propagation : Investigation of the effect of steel reinforcement interlayer on retarding reflective cracking in hot-mix asphalt overlay. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board*, 1949 :32–42, 2006.
- R. S. Barsoum. On the use of isoparametric finite element in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(1) :25–37, 1974.
- K.J. Bathe. *Finite Element Procedures*. 2006.
- J.L. Batoz. *Modélisation des structures par éléments finis -Tome 1*. Hermès - Lavoisier, 1995.
- T. Belytschko, Y. Lu, and L. Gu. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :229–256, 1994.
- T. Belytschko, W. K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear finite element for continua and structures*. Wiley, 1st edition, 650 pages, 2002.
- A. Benallal. *Continuous Damage and Fracture*. Elsevier, 2000.
- P.-E. Bernard, N. Moës, and N. Chevaugeon. Damage growth modeling using the thick level set (TLS) approach : Efficient discretization for quasi-static loadings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 223-236 :11–27, 2012.
- F. Berthemet. Contribution au développement d’un outil de calcul rapide de chaussées fissurées. Stage de Master2 mécanique numérique des structures (MN2S), Université de Nantes, 2012.

- F. Berthemet and A. Chabot. Apports du massif de Winkler dans la construction d' un outil de calcul de structure multicouche fissurée reposant sur un sol. In *21ème Congrès Français de Mécanique*, pages 1–6, Bordeaux, 2013.
- T. Bittencour, P. A. Wawrzynek, A. R. Ingraffea, and J. L. Sousa. Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2d lefm problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(2) :321–334, 1996.
- D. Bodin. *Modèle d'endommagement cyclique : Application à la fatigue des enrobés bitumineux*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes et Université de Nantes, 2002.
- D. Bodin, C. De La Roche, and A. Chabot. Prediction of bituminous mixes fatigue behavior during laboratory fatigue tests. In *Proceedings of the 3rd Eurasphalt & Eurobitume Congress*, volume 2, pages 1935–1945, Vienne, Autriche, 12-14 mai 2004a.
- D. Bodin, G. Pijaudier-Cabot, C. De La Roche, J. M. Piau, and A. Chabot. Continuum damage approach to asphalt concrete fatigue modeling. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 130(6) : 700–708, 2004b.
- D. Bodin, O. Chupin, and E. Denneman. Effect of temperature and traffic speed on the asphalt moduli for fatigue cracking and pavement structural design considerations. In Chabot et al., editor, *8th RILEM International Conference on Mechanisms of Cracking and Debonding in Pavements*, pages 397–402. Springer Netherlands, 2016.
- F. Bouchard, P. O. Bay and Y. Chastel. Numerical modelling of crack propagation : automatic remeshing and comparison of different criteria. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3887–3908, 2003.
- P. O. Bouchard, F. Bay, Y. Chastel, and I. Tovenà. Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189 :723–742, 2000.
- J. Boussinesq. *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gautier Villars, Paris, 1885.
- M. Broutin. *Assesment of flexible airfield Pavements using Heavy Weight Deflectometers - Development of a FEM dynamical time-domain analysis for the backcalculation of structural properties*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2010.
- M. Broutin. Formation shwd - principes de mesure cst colas. Magny Les Hameaux, 11 Juin 2012.
- H.D. Bui. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, 1978.
- L. Bürkli. Contribution au développement d'un outil d'analyse mécanique pour chaussées fissurées. Master's thesis, Université de Nantes, 2010.
- D.M. Burmister. The theory of yhe stress and displacements in layered systems and applications of design of airport runway. In *Proceeding of the Highway Research Board, 23*, pages 126–148, 1943.

- J.F. Caron, R.P. Carreira, and A. Diaz Diaz. Critère d'initiation de délaminage dans les stratifiés. *Académie des sciences*, 327(6) :1291–1296, May 1999.
- J.F. Caron, A. Diaz Diaz, R.P. Carreira, A. Chabot, and A. Ehrlacher. Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered materials. *Composites Science and Technology*, 66(6) :755–765, 2006.
- R.P. Carreira. *Validations par éléments finis des modèles multiparticulaires des matériaux multicouches M4*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1998.
- R.P. Carreira, Caron J. F., and A. Ehrlacher. Validation de modèles multi-particulaire par une approche aux éléments finis 3d pour le calcul des contraintes à l'interface dans le cas des plaques multicouches ($0^\circ, 90^\circ$)s trouées. In *JNC11*, Arcachon, 1998.
- E. Carrera and A. Ciuffreda. Bending of composites and sandwich plates subjected to localized lateral loadings : a comparison of various theories. *Composite Structures*, 68(2) :185–202, April 2005.
- E.A. Castaneda Pinzon. *Contribution de méthodes non destructives à l'évaluation de l'effet de l'eau sur les enrobés bitumeux*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2004.
- A. Chabot. *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches (M4)*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- A. Chabot. *Outils d'analyse du comportement mécanique de multicouches*. Thèse d'habilitation à diriger les recherches, l'Université de Nantes, 2013.
- A. Chabot and A. Ehrlacher. Modèles Multiparticulaires Des Matériaux Multicouches M4_5n et M4_(2n+1)M Pour L'Analyse Des Effets De Bord. In *JNC11*, Arcachon, 1998.
- A. Chabot, S. Cantournet, and A. Ehrlacher. Analyse de taux de restitution d'énergie par un modèle simplifié pour un quadricouche en traction fissuré à l'interface entre 2 couches. In *JNC12*, volume 2, pages 775–784, Cachan, 2000.
- A. Chabot, Q. D. Tran, and B. Pouteau. Simplified modelling of a cracked composite pavement. In *First International Elsevier Conference on Failure Analysis*, Lisbonne, Portugal, 12-14 juillet 2004.
- A. Chabot, Q. D. Tran, and A. Ehrlacher. A simplified modeling for cracked pavements - Modèle simplifié pour le calcul des chaussées fissurées. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et chaussées*, (258-259) :105–120, 2005.
- A. Chabot, Q. D. Tran, and A. Ehrlacher. A modeling to understand where a vertical crack can propagate in pavements. In Taylor & Francis Group Proceedings, editor, *Proceedings of the International Conference on Advanced Characterization of Pavement and Soil Engineering Materials*, volume 1, pages 431–440, Athens, Greece, June 20- 22 2007.

- A. Chabot, B. Pouteau, J.M. Balay, and F. De Larrard. Fabac accelerated loading test of bond between cement overlay and asphalt layers. In Taylor & Francis Group Proceedings, editor, *Proceedings of the 6th International RILEM Conference on Cracking in Pavements*, pages 13–23, Chicago, US, 16-18 June 2008.
- A. Chabot, O. Chupin, L. Deloffre, and D. Duhamel. Viscoroute 2.0 : a tool for the simulation of moving load effects on asphalt pavement. *RMPD Special Issue on Recent Advances in Numerical Simulation of Pavements*, 11(2) :227–250, 2010.
- A. Chabot, M. Hun, and F. Hammoum. Mechanical analysis of a mixed mode debonding test for composite pavements. *Construction and Building Materials*, 40 :1076–1087, March 2013.
- A. Chabot, B. Buttlar, E. Dave, C. Petit, and G. Tebaldi. *Cracking and Debonding in Pavements - 8th RILEM International Conference on Mechanisms of Cracking and Debonding in Pavements*, volume 13 of *Springer Series : RILEM Bookseries*. 1st edition, 2016a.
- A. Chabot, F. Hammoum, and M. Hun. Mixed-mode debonding approach to evaluate water sensibility in bi-layer composite pavement. In Chabot et al., editor, *8th RILEM International Conference on Mechanisms of Cracking and Debonding in Pavements (MCD2016)*, Springer RILEM Bookseries, pages 613–618, Nantes, France, June 7-9 2016b.
- A. Chabot, F. Hammoum, and M. Hun. A 4pt bending bond test approach to evaluate water effect in a composite beam. *Proposed to European Journal of Environmental and Civil Engineering (EJECE)*, 2016c.
- L. Champaney. Contact entre solides élastiques. Notes de cours de DESS Dynamique des Structures Modernes dans leur Environnement, Université de Versailles / Saint-Quentin en Yvelines, 2003.
- J.-S. Chen and C.-J. Tsai. Relating tensile, bending, and shear test data of asphalts binders to pavement performance. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 7(6) :805–811, 1998.
- O. Chupin, A. Chabot, J.-M. Piau, and D. Duhamel. Influence of sliding interfaces on the response of a visco-elastic multilayered medium under a moving load. *International Journal of Solids and Structures*, 47 :3435–3446, 2010.
- O. Chupin, J. Piau, and A. Chabot. Evaluation of the structure-induced rolling resistance (SRR) for pavements including viscoelastic material layers. *Materials and Structures*, 46(4) :683–696, 2013.
- O. Chupin, J.-M. Piau, H. Odéon, and N. Moës. Bump formation on a semi-rigid pavement : Interpretation and modeling using the thick level set. In A. Chabot et al., editor, *8th RILEM International Conference on Mechanisms of Cracking and Debonding in Pavements*, volume 13 of *Springer RILEM Bookseries*, pages 199–205, Nantes, France, June 7-9 2016.
- CIMbéton. Une solution durable contre l’orniérage : Le béton de ciment mince collé ”bcmc”. Technical report, Collection Technique CIMbéton, décembre 2004.

- CIMbéton. Chaussées composites en béton de ciment - tome 1 : Structures neuves en bac collé sur gb. Technical report, Guide de dimensionnement. Collection Technique CIMbéton, février 2009.
- L. Cole, J. Mack, and Packard R. Whitetopping and ultra-thin whitetopping-the us experience. In *8th International Symposium on Concrete Road*, pages 203–217, 1998.
- J. F. Corté and H. Di Benedetto. *Matériaux routiers bitumineux 1 : Description et propriétés des constituants*, volume 1. 2005.
- J. F. Corté and M. T. Goux. Design of Pavement Structures : The French Technical Guide. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board*, 1539 :116–124, 1996.
- F. De Larrard, A. Chabot, T. Sedran, B. Pouteau, and V. Mathias. Recent developments in french concrete pavement technology - global construction : Ultimate concrete opportunities. In *Proceedings of the International Conference on concrete for transportation Infrastructure*, pages 19–26, Dundee, Scotland, 5-7 July 2005.
- H. Di Benedetto and J. F. Corté. *Matériaux routiers bitumineux 2 : constitution et propriétés thermomécaniques des mélanges*, volume 2. Hermes Lavoisier, 2005.
- M. Diakhaté. *Fatigue et comportement des couches d'accrochage dans les structures de chaussée*. Thèse de doctorat, Université de Limoges, 2007.
- M. Diakhaté, A. Millien, C. Petit, A. Phelipot-Mardelé, and B. Pouteau. Experimental investigation of tack coat fatigue performance : Towards an improved lifetime assessment of pavement structure interfaces. *Construction and Building Materials*, 25(2) :1123–1133, 2011.
- M. Diakhaté, M., A. Phelipot, A. Millien, and C. Petit. Shear fatigue behaviour of tack coats in pavements. *Road Materials and Pavement Design*, 7(2) :201–222, 2006.
- A. Diaz Diaz. *Dé laminage des matériaux multicouches - phénomènes modèles et critères*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- Douai. Mécanique de la rupture- la plate-forme de l'école des mines de douai, Juin 2011.
- S. Drapier and R. Fortunier. Méthodes numériques d'approximation et de résolution en mécanique. option matériaux et mécanique - module mécanique numérique, 13 Janvier 2015.
- D. Duhamel, A. Chabot, P. Tamagny, and L. Harfouche. Viscoroute : Visco-elastic modeling for asphalt pavements - viscoroute : Modélisation des chaussées bitumineuses. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et chaussées*, pages 89–103, 2005b.
- H. Dumontet. *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*. Thèse de doctorat en sciences mathématiques. mécanique, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, 1990.
- V. A. Duong. *Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites*. Thèse de doctorat, Ecole nationale des ponts et chaussées, 2008.

- A. Elouard. *Etude numérique par éléments finis de la fissuration avec remaillage automatique- Application à la mécanique des chaussées*. Thèse de doctorat, Ecole des Ponts et Chaussées, 27 avril 1993.
- A.H. England. A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, 32 :400–402, 1965.
- F. Erdogan and P. Paris. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering, Transaction of the American Society of Mechanical Engineers*, pages 528–534, 1963.
- A.D. Espeche and J. Leon. Estimation of bond strength envelopes for old-to-new concrete interfaces based on a cylinder splitting test. *Construction and Building Materials*, 25 :1222–1235, 2011.
- P. Fedelinski. Boundary element method in dynamic analysis of structures with cracks. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28 :1135–1147, 2004.
- G. Ferté, P. Massin, and N. Moës. Interface problems with quadratic x-fem : design of a stable multiplier space and error analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages 834–870, 2014.
- N. Fleck. Finite element analysis of plasticity-induced crack closure under plane-strain conditions. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(4) :441–449, 1986.
- C. Florence. *Etude expérimentale de la fissuration reflective et modélisation de la résistance de structures cellulaires*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées Spécialité : Structures et Matériaux, 2005.
- M. Gharbi, M.L. Nguyen, and A. Chabot. Experimental evaluation of the interface fracture energy for composite pavements. In *Proposed to the EATA*, Dübendorf, Switzerland, June 12-14 2017.
- H. Goacolou, J.-P. Marchand, and A. Mouratidis. La méthode des éléments finis : application à la fissuration des chaussées et au calcul du temps de remontée des fissures. In *Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Laboratoire Régional de l'Ouest de Paris*, 1983.
- N. Gravouil, A. Moës and T. Belytschko. Non-planar 3d crack growth with the extended finite element and level sets - part 2 : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54 :2569–2586, 2002.
- D. Grellet, G. Doré, O. Chupin, and J.-M. Piau. Experimental evidence of the viscoelastic behavior of interfaces in bituminous pavements—an explanation to top-down cracking? In Chabot et al., editor, *8th RILEM International Conference on Mechanisms of Cracking and Debonding in Pavements (MCD2016)*, volume 13 of *Springer RILEM Bookseries*, pages 575–580, Nantes, France, June 7-9 2016.
- A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 221(582-593) :163–198, 1921.

- J.-P. Grimaux and R. Hiernaux. Utilisation de l'orniéreur type lpc. *Bulletin de liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, Numéro Spécial V : Bitumes et Enrobés Bitumineux, 1977.
- J.-P. Grivet. *Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur (édition 2009)*. 2013.
- C. Guillo. Validations par éléments finis d'un modèle simplifié pour l'étude de décollement à l'interface d'un multicouche de chaussée. Stage de dess, Université de Nantes, 2004.
- F. Hammoum, E. Chailleux, H. N. Nguyen, A. Ehrlacher, J.M. Piau, and D. Bodin. Experimental and numerical analysis of crack initiation and growth in thin film of bitumen. *Roads Materials and Pavement Design*, 10(1) :39–61, 2009.
- F. Hammoum, A. Chabot, D. St. Laurent, H. Chollet, and B. Vulturescu. Accelerating and decelerating effects of tramway loads moving on bituminous pavement. *Materials and Structures*, 43 :1257–1269, 2010.
- F. Hecht. Freefem++, un logiciel pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2011.
- F. Hecht and O. Pironneau. Freefem++. Cours FreeFem++, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2013.
- J. V. Heck. *Modélisation des déformations réversibles et étude des déformations permanentes des enrobés bitumineux - Application à l'orniérage des chaussées*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2001.
- J. V. Heck, J. M. Piau, J. C. Gramsammer, J. P. Kerzreho, and H. Odéon. Thermo-viscoelastic modelling of pavements behaviour and comparison with experimental data from lpc test track. In *5th Conference on Bearing Capacity on Bearing Capacity of Roads and Airfield*, Trondheim, Norway, 1998.
- R. Hicks, L. Santucci, and T. Aschenbrener. Moisture sensitivity of asphalt pavements - a national seminar. pages pages 3–20, San Diego, California, February 4-6 2003.
- M. Hittinger and A. Combescure. Introduction d'éléments joints dans le programme inca. Technical report, Rapport DEMA SMTS LAMS no 82-31, CEA Saclay, 1982.
- A.H.A. Hogg. Equilibrium of a thin plate symmetrically loaded, resting on an elastic foundation on infinite depth. *The London, Edimburg and dublin Magazine and Journal of Sciences*, 1938.
- P. Hornych. *Etude expérimentale et modélisation du comportement des matériaux de chaussées non traités*. Thèse d'habilitation à diriger les recherches, Ecole Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur de l'Université Bordeaux 1, 2008.
- P. Hornych, C. Chazallon, F. Allou, and E. El Abd. Prediction of permanent deformations of unbound granular materials in low traffic pavements. *Roads Materials and Pavement Design*, 8(4) :643–666, 2007.

- P. Horny, JP Kerzreho, A. Chabot, D. Bodin, J.-M. Balay, and L. Deloffre. The lcpc's alt facility contribution to pavement cracking knowledge. In Al-Qadi et al., editor, *Proceedings of the Sixth International RILEM Conference on Cracking in Pavement*, Taylor & Francis Group Proceedings, pages 671–681, Chicago, US, June 16-18 2008.
- C. Huet. *Etude par une méthode d'impédance du comportement viscoélastique des matériaux hydrocarbonés*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences de Paris, 1963.
- C. Huet. Coupled size and boundary-condition effects in viscoelastic heterogeneous and composite bodies. *Mechanics of Materials*, (31) :787–829, 1999.
- M. Hun. *Influence de l'eau sur le décollement d'une interface par flexion d'un bicouche de chaussée urbaine*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2012.
- M. Hun, A. Chabot, and F. Hammoum. A four-point bending test for the bonding evaluation of composite pavement. In Scarpas et al., editor, *Proceedings of the 7th RILEM International Conference on Cracking in Pavements*, volume 4 of *Spinger RILEM Bookseries*, pages 51–60, Delft, The Netherlands, Junr 20-22 2012.
- IDRRIM. Diagnostic et conception des renforcements de chaussées. Guide méthodologique, Institut des Routes, des Rues et des Infrastructures de Mobilité (IDRRIM), Mai 2016a.
- IDRRIM. Gepur : Gestion et entretien du patrimoine urbain et routier - méthodes, outils et techniques. Guide technique, Institut des Routes, des Rues et des Infrastructures de Mobilité (IDRRIM), 2016b.
- H. Imine. *Contribution au développement de systèmes d'aide à la conduite : cas des poids lourds et des deux roues motorisés*. Thèse d'habilitation à diriger les recherches, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, Mars 2012.
- IREX. Restitution des résultats du projet national fabac (fatigue du béton armé continu). In *Journée d'étude IREX*, Paris, novembre 2000.
- GR. Irwin. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, (24) :361–364, 1957.
- G. Jeuffroy. Considération théorique sur le calcul des chaussées en béton. *Revue Générale des Routes*, (276), 1955.
- A.D. Kerr. Elastic and viscoelastic foundation models. *Journal of Applied materials*, 31(3) :491–498, 1964.
- M. Kneifati. Analysis of plates on a kerr foundation model. *Journal of Engineering Mechanics*, 111 (11) :1325–1342, November 1985.
- R. Ktari, A. Millien, F. Fouchal, I.O. Pop, and C. Petit. Pavement interface damage behavior in tension monotonic loading. *Construction and Building Materials*, 106 :430–442, 2016.

- Rahma Ktari. *Mécanismes et modélisations des dégradations des interfaces entre couches de chaussées*. Thèse de doctorat, Université de Limoges, 2016.
- LCPC. Chaussées en béton-problèmes posés par la présence d'eau dans leur structure. *Bulletin de liaison des LPC*, (Numéro spécial VIII), 1978.
- LCPC-SETRA. *Conception et dimensionnement des structures de chaussée - Guide technique*. Paris, décembre 1994.
- G. Le Corvec. Simulation des effets du retrait du béton de ciment sur la flexion de matériaux de chaussées fissurées. Master's thesis, Université de Nantes, 2008.
- F. Lebon and R. Rizzoni. Asymptotic behavior of a hard thin linear elastic interphase : An energy approach. *Int. J. Solids Struct.*, 48 :441–449, 2011.
- Y. Lefevre. *Contribution à l'étude du comportement en fatigue des enrobés bitumineux : Etude de l'allongement des éprouvettes comme manifestation de l'endommagement diffus (Expérimentation-Modélisation)*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, mars 2001.
- V. Leitao and M. Aliabadi. Boundary element methods for the analysis of crack growth in non-linear fracture. *International Journal of Materials and Product Technology*, 16(1-2) :104–116, 2000.
- V. Leitao, M. AlLeita, and D. Rooke. Elastoplastic simulation of fatigue crack growth - dual boundary element formulation. *International Journal of Fatigue*, 17(5) :353–363, 1995.
- J. Lemaitre and J.L. Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1990.
- LPC. Etudes routières déformabilité de surfaces des chaussées exécution et exploitation des mesures. Technical report, Méthode d'essai LPC N 39, 1997.
- J. P. Marchand, M. Dauzats, H. Lichtenstein, and R. Kobisch. Quelques formules utiles pour le calcul des chaussées sur petites calculatrices programmables. *Bulletin de liaison des Laboratoire des Ponts et Chaussées*, 125 :53–67, 1983.
- J.P. Marchand. *La mécanique de la rupture appliquée aux chaussées : Modélisation, Dimensionnement, Auscultation-Extension à la fracture Hertzienne*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1984.
- V. Maudit, C. Maudit, N. Vulcano-Greullet, and N. Coulon. Dégradations précoces des couches de roulement bitumineuses à la sortie des hivers. *Revue RGRA*, pages 99–104, 2007.
- V. Maudit, C. Maudit, N. Vulcano-Greullet, N. Coulon, F. Hammoum, and et al. Dégradation subite des enrobés bitumineux par période de gel/dégel : Analyse de cas de terrain et recherche exploratoire en laboratoire. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, pages 47–63, 2013.
- R. McClung and H. Sehitoglu. On the finite element analysis of fatigue crack closure-1. basic modeling issues. *Engineering Fracture Mechanics*, 33(2) :237–252, 1989a.

- R. McClung and H. Sehitoglu. On the finite element analysis of fatigue crack closure-2. numerical results. *Engineering Fracture Mechanics*, 33(2) :253–272, 1989b.
- E. Mengue, H. Mroueh, L. Lancelot, and R. Medjo Eko. Dimensionnement d’une assise de chaussée à base d’un sol latéritique traité au ciment à différents dosages. In *Rencontres Universitaires de Génie Civil*, Bayonne, France, May 2015.
- J.P. Mercier, G. Zambelli, and W. Kurz. *Introduction à la science des matériaux*. Traité des matériaux. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1999.
- N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(46) :131–150, 1999.
- N. Moës, A. Gravouil, and T. Belytschko. Non-planar 3d crack growth with the extended finite element and level sets - part 1 : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53 :2549–2568, 2002.
- N. Moës, C. Stolz, P.-E. Bernard, and N. Chevaugeon. A level set based model for damage growth : the thick level set approach. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 86(8) : 358–380, 2011.
- Y. Monerie and V. Acary. Formulation dynamique d’un modèle de zone cohésive tridimensionnel couplant endommagement et frottement. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 10(02-03-04) : 489–503, 2001.
- T. Naciri, A. Ehrlacher, and A. Chabot. Interlaminar stress analysis with a new multiparticle modeling of multilayered materials (m4). *Composites Science and Technology*, 58 :337–343, 1998.
- H. Nasser and A. Chabot. Outil 2D d’analyse mécanique et paramétrique des chaussées fissurées. In *22ème Congrès Français de Mécanique*, page 10 pages, Lyon, France, 24 - 28 août 2015a.
- H. Nasser and A. Chabot. Two-dimensional software for analysing mechanical fields in elastic cracked pavements. In B.H.V. Topping J. Kruijs, Y. Tsompanakis, editor, *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*. Civil-Comp Press, 1-4 septembre 2015b.
- H. Nasser and A. Chabot. A m4-5n two-dimensional reference solution for the elastic mechanical analysis of cracking in pavements. *Proposed to Advances in Engineering Software (special issue)*, 2016.
- H. Nasser, O. Chupin, J.-M. Piau, and A. Chabot. Solving m4-5n by a Mixed Finite Element method for the analysis of pavements with discontinuities. *Proposed to the Road Materials and Pavement Design journal*, 2016a.
- H. Nasser, J.-M. Piau, O. Chupin, and A. Chabot. M4-5n numerical solution using the Mixed FEM, validation against the Finite Difference Method. In A. Chabot et al., editor, *8th RILEM International Conference on Mechanisms of Cracking and Debonding in Pavements (MCD2016)*, volume 13 of *Springer RILEM Bookseries*, pages 363–369, Nantes, France, June 7-9 2016b.

- N.M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, 85 :67–94, 1959.
- D. T. Nguyen. *Benchmark d'un modèle layer wise de multicouches et implémentation du modèle dans Abaqus*. Thèse de doctorat, Paris Est, 2012.
- H. N. Nguyen. *Approche théorique de la fissuration d'un milieu visco-élastique : analyse des régimes fragiles et ductiles*. Thèse de doctorat, Ecole Doctorale MODES de l'ENPC de Marne la Vallée, 2008.
- O. Nguyen, E. Repetto, N. Ortiz, and R. Radovotzky. A cohesive model for fatigue crack growth. *International Journal of Fracture*, 110 :351–369, 2001.
- V. T. Nguyen. *Finite elements for global and local modelling of multilayered plates*. Thèse de doctorat, Ecole des Ponts ParisTech, 2004.
- N. Odemark. Investigations as to the elastic properties of soils and design of pavements according to the theory of elasticity. Report 77, National Swedish Road and Traffic Research Institute, Linköping, Sweden, 1949.
- N.J. Pagano. Stress fields in composite laminates. *Int. J. Solids Structures*, 14 :385–400, 1978.
- N.J. Pagano and S.R. Soni. Global-local variational model. *International Journal of Solids and Structures*, 19 :207–228, 1983.
- P.L. Pasternak. On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture*, pages 1–56, 1954. (in Russian).
- R.H.J. Peerlings, R. De Borst, W.A.M. Brekelmans, and J.H.P. De Vree. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19) : 3391–3403, 1996.
- S. A. Pérez. *Approche Expérimentale et numérique de la fissuration réfléctive des chaussées*. Thèse de doctorat, Université de Limoges - Faculté des Sciences et Techniques, 2008.
- S. A. Pérez, J. M. Balay, P. Tamagny, and C. Petit. Accelerated pavement testing and modeling of reflective cracking in pavements. *Engineering Failure Analysis*, 14(8) :1526–1537, 2007.
- S. A. Pérez, J.M. Balay, P. Tamagny, A. Chabot, C. Petit, A. Millien, and L. Wendling. Accelerated pavement cracking testing - experimental and finite element analysis. In Al-Qadi et al., editor, *Proceedings of the Sixth International RILEM Conference Cracking in Pavement*, Taylor & Francis Group Proceedings, pages 55–65, Chicago, US, June 16-18 2008.
- C. Petit. *Modélisation de milieux composites multicouches fissurés par le mécanique de la rupture*. Thèse de doctorat en génie civil, Université Blaise Pascal, 1990.

- C. Petit, I.L. Al-Qadi, and A. Millien. *Cracking in Conference : Mitigation, Risk assesment and Prevention - Proceedings of the Fifth International RILEM Conference*. RILEM publications, May 2004.
- G. Pijaudier-Cabot and Z.P. Bazant. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10) :1512–1533, 1987.
- S. Pommier, A. Gravouil, N. Moës, and A. Combescure. *La simulation numérique de la propagation des fissures : milieux tridimensionnels, fonctions de niveau, éléments finis étendus et critères énergétiques*. Edition Hermes - Lavoisier, 2009.
- B. Pouteau. *Durabilité mécanique du collage blanc sur noir dans les chaussées*. Thèse de doctorat, Université de Nantes - Ecole Centrale de Nantes, 2004.
- B. Pouteau, A. Chabot, F. De Larrard, and J. M. . Balay. Mécanique des chaussées béton sur grave-bitume, etude de la tenue du collage entre béton et enrobé sur chaussée expérimentale (1ère partie). *Revue Générale des Routes et des Aérodrômes (RGRA)*, (847) :85–90, 2006a.
- B. Pouteau, J. M. Simonin, and F. De Larrard. Mécanique des chaussées béton sur grave-bitume, suivi du chantier expérimental rn4 de chaussée composite (2ème partie). *Revue Générale des Routes et des Aérodrômes (RGRA)*, (848) :62–66, 2006b.
- M. Raous. Interface models coupling adhesion and friction. *Comptes Rendus Mécanique*, 339 :491–501, 2011.
- M. Raous, S. Cescotto, A. Curnier, F. Dubois, and A. Millard. Contact, frottement, adhésion : bases avancées récentes en modélisation et simulation numérique. Cours de l’Institut pour la Promotion des Sciences de l’Ingénieur, 2004.
- E. Reissner. On a variational theorem in elasticity. *J. Math. Phys.*, 29 :90–95, 1950.
- JR. Rice. Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16 :1–12, 1968.
- S. Romanoschi and Y. Li. Experimental characterization and modeling of fatigue and crack propagation in asphalt concrete layers. In *6th international conference on the bearing capacity of Roadsd Railways and Airfields (BCRA)*, Lisbon, Portugal, 24-26 June 2002.
- S. Salasca. *Calcul par par éléments finis des états de contrainte dans les chaussées rigides/ Evaluation des phénomènes de contact associés aux effets de retrait et de température, application à l’interprétation d’expérimentations sur site*. Thèse de doctorat, Université de Nantes - Ecole Centrale de Nantes, 1998.
- H. Sander, M.and RSande. Experimental and numerical investigations on the influence of the loading direction on the fatigue crack growth. *International Journal of Fatigue*, 28 :583–591, 2006.
- M. Sander and H. Richard. Finite element analysis of fatigue crack growth with interspersed mode i and mixed mode overloads. *International Journal of Fatigue*, 27 :905–913, 2005.

- G. Sayegh. Variations des modules de quelques bitumes purs et béton bitumineux. In *Conférence au groupe français de Rhéologie*, pages 51–74, 1963.
- G. Sayegh. *Contribution à l'étude des propriétés viscoélastiques des bitumes purs et des bétons bitumineux*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences de Paris, 1965.
- A. Scarpas, N. Kringos, and A. Al-Qadi, I. and Loizos. *Mechanisms, Modeling, Testing, Detection and Prevention Case Histories - 7th RILEM International Conference on Cracking in Pavements*, volume 4. Springer Netherlands, 2012.
- T. Sedran and F. De Larrard. *BétonlabPro 2 - Logiciel de formulation de bétons - Version exécutable sous Windows*. logiciel sur CD ROM avec aide en ligne, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Juin 2000.
- R. Serpieri, G. Alfano, and E. Sacco. A mixed-mode cohesive-zone model accounting for finite dilation and asperity degradation. *International Journal of Solids and Structures*, 67-78 :102–115, 2015a.
- J.A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge university press, UK, 1999.
- SETRA-LCPC. *French Design Manual For Pavement Structures*. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées et Service d'Etudes Techniques des Routes et Autoroutes, 1997.
- SETRA-LCPC. Catalogue des structures types de chaussées neuves. Guide technique, 1998.
- C.F. Shih. Tables of hutchinson rice rosenberg singular field quantities. Technical Report MRL E-147, Brown University Report, 1983.
- J. C. Simo and T.A. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures*, 42(1) :97–116, 1992.
- J. Sohm. *Prédiction des déformations permanentes des matériaux de chaussées*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes (ECN), ED SPIGA, 2011.
- J. Sohm, T. Gabet, P. Horny, J.M. Piau, and H. Di Benedetto. Creep tests on bituminous mixtures and modelling. *International journal of road materials and pavement design*, 13(4) :832–849, 2012.
- K. Solanki, S. Daniewicz, and J.J. Newman. Finite element modeling of plasticity-induced crack closure with emphasis on geometry and mesh refinement. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(12) : 1475–1489, 2003.
- S. Solanki, K. and DaniSola and J. J. Newman. Finite element analysis of plasticity-induced fatigue crack closure : an overview. *Engineering Fracture Mechanics*, 71(2) :149–171, 2004.
- C. Stolz and N. Moës. A new model of damage : a moving thick layer approach. *International Journal of Fracture*, 174 :49–60, 2012.

- N. Sukumar, J.E. Dolbow, and N. Moës. Extended finite element method in computational fracture mechanics : a retrospective examination. *International Journal of Fracture*, December 2015.
- P.M. Suquet. Discontinuities and plasticity, nonsmooth mechanics and applications (moreau, j.j., panagiotopoulos, p.d. (eds.)). *International Centre for Mechanical Sciences, Springer Vienna*, pages 279–340, 1988.
- A. Trädegård, F. Nilsson, and S. Östlund. Fem-remeshing technique applied to crack growth problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 160 :115–131, 1998.
- Q. D. Tran. *Utilisation d'un modèle multiparticulaire pour l'analyse des contraintes dans une chaussée*. Stage de DEA, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 2001.
- Q. D. Tran. *Modèle simplifié pour les chaussées fissurées multicouches*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.
- Q. D. Tran, A. Chabot, A. Ehrlacher, and P. Tamagny. A simplified modelling for cracking in pavements. In Petit et al., editor, *Fifth International RILEM Conference Cracking in Pavements*, Rilem Proceedings, pages 299–306, Limoges, May 5-8 2004.
- Q.-T. Trinh. *Modélisation tridimensionnelle en élastostatique des domaines multizones et multifissurés : une approche par la méthode multipôle rapide en éléments de frontière de Galerkin*. Thèse de doctorat, Ecole doctorale Mathématiques, sciences de l'information et de l'ingénieur - Université de Strasbourg, 2014.
- J. Tuhkuri. Dual boundary element analysis of closed cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :2995–3014, 1997.
- V. Tung Nguyen. *Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.
- V. Tvergaard. On fatigue crack growth in ductile materials by crack tip blunting. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52 :2149–2166, 2004.
- F.P. Van der Meer, L.J. Sluys, and N. Moës. Toward efficient and robust computation of energy release rate and mode mix for delamination. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 43 (7) :1101–1112, 2012.
- Vulcano-Greullet, J. P. N., Kerzreho, A. Chabot, and V. Mauduit. Stripping phenomenon in thick pavement top layers. In *11th International Conference On Asphalt Pavements*, Nagoya Aichi, Japan, August 1-6 2010.
- H.M. Westergaard. Stresses in concrete pavements computed theoretical analysis. *Public Roads*, 7, 1926.
- M.L. Williams. The stress around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 49(2) :199–204, 1959.

- P. Wriggers, T. Vu Van, and E. Stein. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Computers and Structures*, 37(3) :319–331, 1989.
- A. Yan and H. Nguyen-Dang. Multiple-cracked fatigue crack growth by bem. *Computational Mechanics*, 16 :273–280, 1995.
- Z. Yang. An energy-based crack growth criterion for modelling elastic-plastic ductile failure. *Mechanics Research Communications*, 32 :514–524, 2005.
- O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The finite element method : its basis and fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2005.
- O.C. Zienkiewicz. *La méthode des éléments finis : appliquée à l'art de l'ingénieur*. Ediscience, 1973.
- O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *Finite Element Method, Volume 1 - The Basis*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 5th edition edition, 2000. ISBN : 978-0-7506-5049-6.

Annexe A

Détails des calculs M4-5nW de la chaussée 2D de référence résolue par la méthode aux différences finies

Sont données dans cette annexe les équations du M4-5nW 2D sous leur forme générale conformément au stage de (Berthemet, 2012).

Afin d'étudier les équations le plus analytiquement possible, nous avons simplifié le travail et faire l'hypothèse de travailler en déformations planes. Nous supposons donc que les déformations de la structure étudiée ont uniquement lieu dans le plan (O,x,z avec z correspondant à l'axe d'empilement du multicouche(dirigé vers le bas). Nous avons donc :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^i = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^i & 0 & \varepsilon_{13}^i \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31}^i & 0 & \varepsilon_{33}^i \end{bmatrix} \quad \text{avec } i \in \{1, n\} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(A)}{\partial y} = 0 \quad \text{avec A tenseur} \quad (\text{A.1})$$

Dans le tableau A.1 sont regroupés le bilan des inconnues du problème 3D comparés à celui en déformation plane pour : $i \in \{1, n\}$ si les efforts sont de couche, $i \in \{1, n - 1\}$ si les efforts sont d'interfaces et $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$

Nous avons posé N_{22}^i et M_{22}^i comme inconnues secondaires car elles se déduisent directement de N_{11}^i et M_{11}^i à partir des équations A.3 et A.5 respectivement.

D'après les équations de comportement de couche i et d'interface $i, i+1$ et sous l'hypothèse des déformations planes, nous avons $(8n-2)$ équations M4-5n à résoudre. Ces équations dépendent des $6n$ variables $N_{11}^i(x), M_{11}^i(x), Q_1^i(x), U_1^i(x), U_3^i(x), \phi_1^i(x)$ de couche i et des $2(n-1)$ inconnues d'interfaces $i, i+1$ $\tau_1^{i, i+1}(x)$ et $\nu^{i, i+1}(x)$.

Les inconnues statiques de couche i sont :

$$N_{11}^i(x) = \frac{e^i E^i}{1 - \nu^{i2}} (U_{1,1}^i(x) - \varepsilon_{11}^{ian}(x)) \quad (\text{A.2})$$

$$N_{22}^i(x) = \nu^i N_{11}^i(x) \quad (\text{A.3})$$

TABLE A.1 – Tableau récapitulatif des différentes inconnues du système

Tenseurs	3D		Déformation plane			Nombre d'inconnues principales
	Inconnues	Nombres d'inconnues	Inconnues levées (=0)	Inconnues secondaires	Inconnues principales	
$U_{\alpha}^i(x, y)$	$U_1^i(x, y) U_2^i(x, y)$	2n	$U_2^i(x)$	—	$U_1^i(x)$	n
$U_3^i(x, y)$	$U_3^i(x, y)$	n	—	—	$U_3^i(x)$	n
$\phi_{\alpha}^i(x, y)$	$\phi_1^i(x, y) \phi_2^i(x, y)$	2n	$\phi_2^i(x)$	—	$\phi_1^i(x)$	n
$N_{\alpha\beta}^i(x, y)$	$N_{11}^i(x, y)$ $N_{12}^i(x, y)$ $N_{22}^i(x, y)$	3n	$N_{12}^i(x)$	$N_{22}^i(x)$	$N_{11}^i(x)$	n
$M_{\alpha\beta}^i(x, y)$	$M_{11}^i(x, y)$ $M_{12}^i(x, y)$ $M_{22}^i(x, y)$	3n	$M_{12}^i(x)$	$M_{22}^i(x)$	$M_{11}^i(x)$	n
$Q_{\alpha}^i(x, y)$	$Q_1^i(x, y) Q_2^i(x, y)$	2n	$Q_2^i(x)$	—	$Q_1^i(x)$	n
$\tau_{\beta}^{i,i+1}(x, y)$	$\tau_1^{i,i+1}(x, y)$ $\tau_2^{i,i+1}(x, y)$	2(n-1)	$\tau_2^{i,i+1}(x)$	—	$\tau_1^{i,i+1}(x)$	n-1
$\nu^{i,i+1}(x, y)$	$\nu^{i,i+1}(x, y)$	n-1	—	—	$\nu^{i,i+1}(x)$	n-1
$\varepsilon_{\alpha\beta}^i(x, y)$	$\varepsilon_{11}^i(x, y) \varepsilon_{12}^i(x, y)$ $\varepsilon_{22}^i(x, y)$	3n	$\varepsilon_{12}^i(x) \varepsilon_{22}^i(x)$	—	$\varepsilon_{11}^i(x)$	n
$\chi_{\alpha\beta}^i(x, y)$	$\chi_{11}^i(x, y)$ $\chi_{12}^i(x, y)$ $\chi_{22}^i(x, y)$	3n	$\chi_{12}^i(x) \chi_{22}^i(x)$	—	$\chi_{11}^i(x)$	n
$d_{\alpha}^i(x, y)$	$d_1^i(x, y) d_2^i(x, y)$	2n	$d_2^i(x, y)$	—	$d_1^i(x, y)$	n
$D_{\alpha}^{i,i+1}(x, y)$	$D_1^{i,i+1}(x, y)$ $D_2^{i,i+1}(x, y)$	2(n-1)	$D_2^{i,i+1}(x, y)$	—	$D_1^{i,i+1}(x, y)$	n-1
$D_3^{i,i+1}(x, y)$	$D_3^{i,i+1}(x, y)$	n-1	—	—	$D_3^{i,i+1}(x, y)$	n-1
		Total 21n+6(n-1)				Total 9n+4(n-1)

$$M_{11}^i(x) = \frac{e^{i3} E^i}{12(1 - \nu^{i2})} (\phi_{1,1}^i(x) - \chi_{11}^{ian}(x)) \quad (\text{A.4})$$

$$M_{22}^i(x) = \nu^i M_{11}^i(x) \quad (\text{A.5})$$

$$Q_1^i(x) = \frac{5e^i E^i}{12(1 + \nu^i)} (\phi_1^i(x) + U_{3,1}^i(x) - d_1^{ian}(x)) + \frac{e^i}{12} (\tau_1^{i-1,i}(x) + \tau_1^{i,i+1}(x)) \quad (\text{A.6})$$

Les inconnues statiques d'interface $i, i+1$ sont :

$$U_1^{i+1}(x) - U_1^i(x) - \frac{e^i}{2} \phi_1^i(x) - \frac{e^{i+1}}{2} \phi_1^{i+1}(x) - D_1^{i,i+1an}(x) = -\frac{Q_1^i(x)}{10G^i} - \frac{Q_1^{i+1}(x)}{10G^{i+1}} - \frac{e^i}{30G^i} \tau_1^{i-1,i}(x) - \frac{e^{i+1}}{30G^{i+1}} \tau_1^{i+1,i+2}(x) + \frac{2}{15} \left(\frac{e^i}{G^i} + \frac{e^{i+1}}{G^{i+1}} \right) \tau_1^{i,i+1}(x) \quad (\text{A.7})$$

$$U_3^{i+1}(x) - U_3^i(x) - D_3^{i,i+1an}(x) = \frac{9}{70} \frac{e^i}{E^i} \nu^{i-1,i}(x) + \frac{9}{70} \frac{e^{i+1}}{E^{i+1}} \nu^{i+1,i+2}(x) + \frac{13}{35} \left(\frac{e^i}{E^i} + \frac{e^{i+1}}{E^{i+1}} \right) \nu^{i,i+1}(x) \quad (\text{A.8})$$

Les inconnues cinématiques de couche i :

$$N_{11,1}^i(x) = \tau_1^{i-1,i}(x) - \tau_1^{i,i+1}(x) \quad (\text{A.9})$$

$$Q_{1,1}^i(x) = \nu^{i-1,i}(x) - \nu^{i,i+1}(x) \quad (\text{A.10})$$

$$Q_1^i(x) = M_{11,1}^i(x) + \frac{e^i}{2} \left(\tau_1^{i-1,i}(x) + \tau_1^{i,i+1}(x) \right) \quad (\text{A.11})$$

A.1 Ecriture du système par couche

La manipulation des équations du modèle M4-5n (Eq. A.2 à A.11) donne les trois équations de couche i suivantes :

$$\frac{e^i E^i}{1 - \nu^{i2}} (U_{1,11}^i(x) - \varepsilon_{11,1}^{ian}(x)) = \tau_1^{i-1,i}(x) - \tau_1^{i,i+1}(x) \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{e^{i2}}{5(1 - \nu^i)} (\phi_{1,11}^i(x) - \chi_{11,1}^{ian}(x)) - U_{3,1}^i(x) - \phi_1^i(x) + d_{1,1}^{ian}(x) = -\frac{(1 + \nu^i)}{E^i} (\tau_1^{i-1,i}(x) + \tau_1^{i,i+1}(x)) \quad (\text{A.13})$$

$$U_{3,11}^i(x) + \phi_{1,1}^i(x) - d_{1,1}^{ian}(x) = \frac{12(1 + \nu^i)}{5e^i E^i} (\nu^{i-1,i}(x) - \nu^{i,i+1}(x)) - \frac{(1 + \nu^i)}{5E^i} (\tau_{1,1}^{i-1,i}(x) + \tau_{1,1}^{i,i+1}(x)) \quad (\text{A.14})$$

Afin de simplifier l'écriture de ces trois équations (A.12, A.13, A.14) nous allons multiplier l'équation A.13 par $\frac{E^i}{1 + \nu^i}$ et l'équation A.14 par $\frac{5E^i}{1 + \nu^i}$, nous obtenons alors :

$$\frac{e^{i2} E^i}{5(1 - \nu^{i2})} (\phi_{1,11}^i(x) - \chi_{11,1}^{ian}(x)) - \frac{E^i}{1 + \nu^i} (U_{3,1}^i(x) + \phi_1^i(x) - d_{1,1}^{ian}(x)) = -(\tau_1^{i-1,i}(x) + \tau_1^{i,i+1}(x)) \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{5E^i}{1 + \nu^i} (U_{3,11}^i(x) + \phi_{1,1}^i(x) - d_{1,1}^{ian}(x)) = \frac{12}{e^i} (\nu^{i-1,i}(x) - \nu^{i,i+1}(x)) - (\tau_{1,1}^{i-1,i}(x) + \tau_{1,1}^{i,i+1}(x)) \quad (\text{A.16})$$

Ces trois équations principales simplifiées (A.12, A.15, A.16) peuvent s'écrire sous forme matricielle $\forall i \in \{1, n\}$ comme suit :

$$[N_1^i] X_{,11}^i + [N_2^i] X_{,1}^i + [N_3^i] X^i = [N_4^i] Y_{,1}^{i-1,i} + [N_5^i] Y^{i-1,i} + [N_4^i] Y_{,1}^{i,i+1} + [N_6^i] Y^{i,i+1} + [CT_1^i] \quad (\text{A.17})$$

En posant les tenseurs d'efforts d'inconnues de couche i $[X^i] = \begin{bmatrix} U_1^i \\ \phi_1^i \\ U_3^i \end{bmatrix}$ et d'interfaces $i,i+1$ $[Y^{i,i+1}] =$

$$\begin{bmatrix} \tau_1^{i,i+1} \\ \nu^{i,i+1} \end{bmatrix}$$

$[N_j^i]_{j=1,2,3}$ sont des tenseurs d'ordre 3x3 et $[N_j^i]_{j=4,\dots,6}$ sont des tenseurs d'ordre 3x2. $[CT_1^i]$ est le tenseur des constantes d'ordre 3x1.

Ces tenseurs sont donnés sous forme explicite suivante.

$$[N_1^i] = \begin{bmatrix} \frac{e^i E^i}{1 - \nu^{i2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{i2} E^i}{5(1 - \nu^{i2})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5E^i}{1 + \nu^i} \end{bmatrix} \quad [N_2^i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E^i}{1 + \nu^i} \\ 0 & \frac{5E^i}{1 + \nu^i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_3^i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E^i}{1 + \nu^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [N_4^i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[N_5^i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & \frac{12}{e^i} \end{bmatrix} \quad [N_6^i] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{e^i} \end{bmatrix}$$

$$[CT_1^i] = \begin{bmatrix} \frac{e^i E^i}{1 - \nu^{i2}} \varepsilon_{11,1}^{ian}(x) \\ \frac{e^{i2} E^i}{5(1 - \nu^{i2})} \chi_{11,1}^{ian}(x) - \frac{E^i}{1 + \nu^i} d_1^{ian}(x) \\ \frac{5E^i}{1 + \nu^i} d_{1,1}^{ian}(x) \end{bmatrix}$$

Nous avons donc 3 équations pour la couche i en fonction de 3 inconnues cinématiques et 2 inconnues statiques d'interface $i, i+1$. Afin d'éliminer les inconnues d'interface $\tau_1^{i-1,i}, \tau_1^{i,i+1}, \nu^{i-1,i}, \nu^{i,i+1}$ dans le système précédent, nous utilisons les équations de comportement d'interface A.7 et A.8. Après combinaison, nous obtenons les 2 équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{e^{i+1}}{12} U_{3,1}^{i+1}(x) + \frac{e^i}{12} U_{3,1}^i(x) + U_1^{i+1}(x) - U_1^i(x) - \frac{5e^{i+1}}{12} \phi_1^{i+1}(x) - \frac{5e^i}{12} \phi_1^i(x) \\ & - D_1^{i,i+1an}(x) - \frac{e^i}{12} d_1^{ian}(x) - \frac{e^{i+1}}{12} d_1^{i+1an}(x) = -\frac{e^i(1 + \nu^i)}{12E^i} \tau_1^{i-1,i}(x) \\ & - \frac{e^{i+1}(1 + \nu^{i+1})}{12E^{i+1}} \tau_1^{i+1,i+2}(x) + \left(\frac{e^i(1 + \nu^i)}{4E^i} + \frac{e^{i+1}(1 + \nu^{i+1})}{4E^{i+1}} \right) \tau_1^{i,i+1} \end{aligned} \quad (A.18)$$

$$\begin{aligned} U_3^{i+1}(x) - U_3^i(x) - D_3^{i,i+1an}(x) &= \frac{9}{70} \frac{e^i}{E^i} \nu^{i-1,i}(x) + \frac{9}{70} \frac{e^{i+1}}{E^{i+1}} \nu^{i+1,i+2}(x) \\ &+ \frac{13}{35} \left(\frac{e^i}{E^i} + \frac{e^{i+1}}{E^{i+1}} \right) \nu^{i,i+1}(x) \end{aligned} \quad (A.19)$$

Ces 2 équations de comportement d'interface obtenues peuvent s'écrire comme précédemment sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
[N_7^i]X_{,1}^i + [N_7^{i+1}]X_{,1}^{i+1} + [N_8^i]X^i + [N_9^{i+1}]X^{i+1} &= [N_{10}^i]Y^{i-1,i} + [N_{11}^i]Y^{i,i+1} \\
&+ [N_{10}^i]Y^{i+1,i+2} + [CT_2^i] \quad \forall i \in \{1, n-1\} \quad (A.20)
\end{aligned}$$

$[N_j^i]_{j=8,\dots,11}$ sont des tenseurs d'ordre 2x3, $[N_j^i]_{j=12,13,14}$ sont des tenseurs d'ordre 2x2 et $[CT_2^i]$ est le tenseur des constantes d'ordre 3x1.

Ces tenseurs s'écrivent :

$$\begin{aligned}
[N_7^i] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{e^i}{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [N_8^i] &= \begin{bmatrix} -1 & -\frac{5e^i}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
[N_9^{i+1}] &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5e^{i+1}}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & [N_{10}^i] &= \begin{bmatrix} -\frac{e^i(1+\nu^i)}{12E^i} & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} \frac{e^i}{E^i} \end{bmatrix} \\
[N_{11}^i] &= \begin{bmatrix} \frac{e^i(1+\nu^i)}{4E^i} + \frac{e^{i+1}(1+\nu^{i+1})}{4E^{i+1}} & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} \left(\frac{e^i}{E^i} + \frac{e^{i+1}}{E^{i+1}} \right) \end{bmatrix} \\
[CT_2^i] &= \begin{bmatrix} D_1^{i,i+1an}(x) + \frac{e^i}{12} d_1^{ian}(x) + \frac{e^{i+1}}{12} d_1^{i+1an}(x) \\ D_3^{i,i+1an}(x) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A.2 Ecriture du système global

Nous posons :

$$[X] = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{bmatrix}_{3n \times 1}; [Y^{0,1}] = \begin{bmatrix} \tau_1^{0,1} \\ \nu^{0,1} \end{bmatrix}_{2 \times 1}; [Y^{n,n+1}] = \begin{bmatrix} \tau_1^{n,n+1} \\ \nu^{n,n+1} \end{bmatrix}_{2 \times 1}; [Y^{1,n}] = \begin{bmatrix} Y^{1,2} \\ \vdots \\ Y^{n-1,n} \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 1}$$

Assemblé pour n couches, le système d'équations s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
[M_1]X_{,11} + [M_2]X_{,1} + [M_3]X &= [M_4]Y_{,1}^{0,1} + [M_5]Y_{,1}^{1,n} + [M_6]Y_{,1}^{n,n+1} + [M_7]Y^{0,1} + [M_8]Y^{1,n} \\
&+ [M_9]Y^{n,n+1} + [CT_1] \quad (A.21)
\end{aligned}$$

Ces matrices sont donnés sous forme explicite suivante.

$$[M_1] = \begin{bmatrix} [N_1^1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [N_1^2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [N_1^{n-1}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [N_1^n] \end{bmatrix}_{3n \times 3n} \quad [M_4] = \begin{bmatrix} [N_4^1] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{3n \times 2}$$

$$[M_2] = \begin{bmatrix} [N_2^1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [N_2^2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [N_2^{n-1}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [N_2^n] \end{bmatrix}_{3n \times 3n} \quad [M_6] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ [N_4^n] \end{bmatrix}_{3n \times 2}$$

$$[M_3] = \begin{bmatrix} [N_3^1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [N_3^2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [N_3^{n-1}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [N_3^n] \end{bmatrix}_{3n \times 3n} \quad [M_7] = \begin{bmatrix} [N_5^1] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{3n \times 2}$$

$$[M_5] = \begin{bmatrix} [N_4^1] & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ [N_4^2] & [N_4^2] & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & [N_4^{n-1}] & [N_4^{n-1}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [N_4^n] \end{bmatrix}_{3n \times 2(n-1)} \quad [M_9] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ [N_6^n] \end{bmatrix}_{3n \times 2}$$

$$[M_8] = \begin{bmatrix} [N_6^1] & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ [N_5^2] & [N_6^2] & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & [N_5^{n-1}] & [N_6^{n-1}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [N_5^n] \end{bmatrix}_{3n \times 2(n-1)} \quad [CT_1] = \begin{bmatrix} [CT_1^1] \\ [CT_1^2] \\ \vdots \\ [CT_1^{n-1}] \\ [CT_1^n] \end{bmatrix}_{3n \times 1}$$

Ce système est un système de $3n$ équations pour $3n$ inconnues cinématiques plus $2(n-1)$ inconnues statiques d'interface. Les matrices $[M_1]_{3n \times 3n}$, $[M_2]_{3n \times 3n}$, $[M_3]_{3n \times 3n}$, $[M_4]_{3n \times 2}$, $[M_5]_{3n \times 2(n-1)}$, $[M_6]_{3n \times 2}$, $[M_7]_{3n \times 2}$, $[M_8]_{3n \times 2(n-1)}$, $[M_9]_{3n \times 2}$ sont des matrices écrites en fonction des matrices élémentaires $[N_j^i]$ avec $i=1, n$ et $j=1, 6$ du système précédent A.17.

De même, assemblé sur les $n-1$ interfaces, nous pouvons réécrire globalement les $2(n-1)$ équations de comportement d'interface de la manière suivante :

$$[M_{10}]X_{,1} + [M_{11}]X = [M_{12}]Y^{0,1} + [M_{13}]Y^{1,n} + [M_{14}]Y^{n,n+1} + [CT_2] \quad (\text{A.22})$$

Les dimensions de ces matrices sont $[M_{10}]_{2(n-1) \times 3n}$, $[M_{11}]_{2(n-1) \times 3n}$, $[M_{12}]_{2(n-1) \times 2(n-1)}$, $[M_{13}]_{2(n-1) \times 2(n-1)}$, $[M_{14}]_{2(n-1) \times 2}$ et elles sont donnés sous forme explicite suivante.

$$[M_{10}] = \begin{bmatrix} [N_7^1] & [N_7^2] & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [N_7^2] & [N_7^3] & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & [N_7^{n-2}] & [N_7^{n-1}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & [N_7^{n-1}] & [N_7^n] \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 3n}$$

$$[M_{11}] = \begin{bmatrix} [N_8^1] & [N_8^2] & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [N_8^2] & [N_8^3] & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & [N_8^{n-2}] & [N_8^{n-1}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & [N_8^{n-1}] & [N_8^n] \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 3n}$$

$$[M_{12}] = \begin{bmatrix} [N_{10}^1] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 2} \quad [M_{14}] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ [N_{10}^n] \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 2}$$

$$[M_{13}] = \begin{bmatrix} [N_{11}^1] & [N_{10}^2] & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ [N_{10}^2] & [N_{11}^2] & [N_{10}^3] & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & [N_{10}^{n-2}] & [N_{11}^{n-2}] & [N_{10}^{n-1}] \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & [N_{10}^{n-1}] & [N_{11}^{n-1}] \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 2(n-1)}$$

$$[CT_2] = \begin{bmatrix} [CT_2^1] \\ [CT_2^2] \\ \vdots \\ [CT_2^{n-1}] \\ [CT_2^n] \end{bmatrix}_{2(n-1) \times 1}$$

Exprimons $Y^{1,n}$ en fonction des matrices nouvellement créées :

$$Y^{1,n} = [M_{13}]^{-1} ([M_{10}]X_{,1} + [M_{11}]X - [M_{12}]Y^{0,1} - [M_{14}]Y^{n,n+1} - [CT_2]) \quad (\text{A.23})$$

Dérivons cette équation :

$$Y_{,1}^{1,n} = [M_{13}]^{-1} ([M_{10}]X_{,11} + [M_{11}]X_{,1} - [M_{12}]Y_{,1}^{0,1} - [M_{14}]Y_{,1}^{n,n+1}) \quad (\text{A.24})$$

Les équations A.23 et A.24 utilisées dans l'équation globale du système A.21 donne un système global à résoudre de $3n$ équations pour $3n$ inconnues cinématiques inscrites dans le vecteur X :

$$AX''(x) + BX'(x) + CX(x) = DY^{0,1'}(x) + EY^{n,n+1'}(x) + FY^{0,1}(x) + GY^{n,n+1}(x) + H(x) \quad (\text{A.25})$$

où l'on note par « ' » les dérivées premières des champs inconnus et par « '' » les dérivées secondes des champs par rapport à cette variable, x . $X(x)$ représente le vecteur contenant les $3n$ inconnues cinématiques moyens par couche de Reissner-Mindlin, notés $U_1^i(x)$, $\phi_1^i(x)$ et $U_3^i(x)$. Ces champs cinématiques, inconnus du problème à résoudre, définissent ainsi respectivement : les déplacements moyens dans le plan de la couche i ; leur rotation moyenne ; et les déplacements verticaux moyens pour chaque couche i du problème ($i \in \{1, n\}$). $Y^{0,1}(x)$ et $Y^{n,n+1}(x)$ sont les vecteurs d'efforts d'interface entre la structure multicouche et son environnement extérieur permettant l'écriture des conditions aux limites de chargement des véhicules s'exerçant au-dessus (exposant "0,1" entre l'extérieur et la première couche) et au-dessous (exposant "n,n+1", entre la dernière couche et l'extérieur) de la chaussée.

Avec :

$$\begin{cases} [A] = [M_1] - [M_5][M_{13}]^{-1}[M_{10}] \\ [B] = [M_2] - [M_5][M_{13}]^{-1}[M_{11}] - [M_8][M_{13}]^{-1}[M_{10}] \\ [C] = [M_3] - [M_8][M_{13}]^{-1}[M_{11}] \\ [D] = [M_4] - [M_5][M_{13}]^{-1}[M_{12}] \\ [E] = [M_6] - [M_5][M_{13}]^{-1}[M_{14}] \\ [F] = [M_7] - [M_8][M_{13}]^{-1}[M_{12}] \\ [G] = [M_9] - [M_8][M_{13}]^{-1}[M_{14}] \\ [H] = [CT_1] + [M_8][M_{13}]^{-1}[CT_2] \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Où les matrices $[A]_{3n \times 3n}$, $[B]_{3n \times 3n}$, $[C]_{3n \times 3n}$, $[D]_{3n \times 2}$, $[E]_{3n \times 2}$, $[F]_{3n \times 2}$, $[G]_{3n \times 2}$ et $[H]_{3n \times 1}$ ne dépendent que des paramètres géométriques et mécaniques des matériaux du problème élastique équivalent.

A.3 Adimensionnalisation du système global

Pour éviter les problèmes de mauvais conditionnement de matrices, nous réalisons une étape d'adimensionnalisation des différentes variables. Nous notons \overline{U}_1^i , \overline{U}_3^i , $\overline{\phi}_1^i$, $\overline{\nu}^{i,i+1}$ et $\overline{\tau}_1^{i,i+1}$ les champs adimensionnels. Nous posons également \overline{e}^i , \overline{E}^i comme étant l'épaisseur et le module de la couche i adimensionnel.

E^s , q et L_c sont respectivement le module d'Young du sol, la valeur en pression linéique de la charge et la valeur de l'étendue de cette charge. Nous avons donc :

$$\overline{e^i} = \frac{e^i}{L_c}, \quad \overline{E^l} = \frac{E^l}{E^s} \quad (\text{A.27})$$

$$\overline{U_1^i} = \frac{E^s}{qL_c} U_1^i \quad \overline{U_3^i} = \frac{E^s}{qLF} U_3^i \quad \overline{\phi_1^i} = \frac{E^s}{q} \phi_1^i \quad (\text{A.28})$$

$$\overline{\tau_1^{i,i+1}} = \frac{\tau_1^{i,i+1}}{q} \quad \overline{\nu^{i,i+1}} = \frac{\nu^{i,i+1}}{q} \quad (\text{A.29})$$

Dans la suite, afin d'alléger les expressions analytiques, nous gardons les notations précédentes et supposons que $e^i, E^i, U_1^i, U_3^i, \phi_1^i, \tau_1^{i,i+1}$ et $\nu^{i,i+1}$ sont les valeurs adimensionnalisées.

A.4 Discrétisation du système par la méthode de Newmark

Pour résoudre l'équation A.25, nous faisons la discrétisation par l'approximation de Newmark (Figure A.1), nous obtenons l'équation finale suivante :



FIGURE A.1 – Schéma de discrétisation de l'approximation de Newmark

$$\mathbb{A}\mathbb{X}(x) = \mathbb{B}\mathbb{Y}^{0,1}(x) + \mathbb{C}\mathbb{Y}^{n,n+1}(x) + \mathbb{D} \quad (\text{A.30})$$

La matrice \mathbb{A} est de dimension $3nN \times 3nN$. Les deux tenseurs \mathbb{B} et \mathbb{C} , de dimension $3nN \times 2N$, représentent les tenseurs résultants des forces de chargements et autres contions aux limites s'exerçant respectivement au-dessus et au-dessous du multicouche par l'intermédiaire des $Y^{0,1}(x)$ et $Y^{n,n+1}(x)$. \mathbb{D} est la matrice des constantes.

L'expression qui donne la dérivée première du vecteur inconnu \mathbb{X} entre les points j et $j+1$ en fonction du pas de discrétisation K_{j+1} et des valeurs de x en ces points :

$$\frac{X'_{j+1} + X'_j}{2} = \frac{X_{j+1} + X_j}{k_{j+1}} \quad (\text{A.31})$$

Avec $K_{j+1} = x(j+1) - x(j)$ et x la coordonnée du noeud j .

La dérivée seconde de X entre j et $j+1$ s'écrit alors :

$$\frac{X''_{j+1} + X''_j}{2} = \frac{X'_{j+1} + X'_j}{k_{j+1}} \quad (\text{A.32})$$

Le système d'équations différentielles d'ordre 2 A.25 aux points j et $j+1$ s'exprime sous la forme :

$$\begin{cases} X_j'' = -A^{-1}BX_j' - A^{-1}CX_j + A^{-1}DY_j^{0,1'} + A^{-1}EY_j^{n,n+1'} + A^{-1}FY_j^{0,1} \\ + A^{-1}GY_j^{n,n+1} + A^{-1}H \\ X_{j+1}'' = -A^{-1}BX_{j+1}' - A^{-1}CX_{j+1} + A^{-1}DY_{j+1}^{0,1'} + A^{-1}EY_{j+1}^{n,n+1'} \\ + A^{-1}FY_{j+1}^{0,1} + A^{-1}GY_{j+1}^{n,n+1} + A^{-1}H \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

En faisant la somme de ces deux équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} X_{j+1}'' + X_j'' &= -A^{-1}B(X_{j+1}' + X_j') - A^{-1}C(X_{j+1} + X_j) + A^{-1}D(Y_{j+1}^{0,1'} + Y_j^{0,1'}) \\ &+ A^{-1}E(Y_{j+1}^{n,n+1'} + Y_j^{n,n+1'}) + A^{-1}F(Y_{j+1}^{0,1} + Y_j^{0,1}) + A^{-1}G(Y_{j+1}^{n,n+1} + Y_j^{n,n+1}) + 2A^{-1}H \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

En utilisant l'équation A.32, nous obtenons :

$$\begin{aligned} X_{j+1}' - X_j' &= \frac{k_{j+1}}{2}(-A^{-1}B(X_{j+1}' + X_j') - A^{-1}C(X_{j+1} + X_j) + A^{-1}D(Y_{j+1}^{0,1'} + Y_j^{0,1'}) \\ &+ A^{-1}E(Y_{j+1}^{n,n+1'} + Y_j^{n,n+1'}) + A^{-1}F(Y_{j+1}^{0,1} + Y_j^{0,1}) + A^{-1}G(Y_{j+1}^{n,n+1} + Y_j^{n,n+1}) + 2A^{-1}H) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

En réécrivant les équations A.33 entre les points j et $j-1$, et en les sommant de la manière précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} X_j' - X_{j-1}' &= \frac{k_j}{2}(-A^{-1}B(X_j' + X_{j-1}') - A^{-1}C(X_j + X_{j-1}) + A^{-1}D(Y_j^{0,1'} + Y_{j-1}^{0,1'}) \\ &+ A^{-1}E(Y_j^{n,n+1'} + Y_{j-1}^{n,n+1'}) + A^{-1}F(Y_j^{0,1} + Y_{j-1}^{0,1}) + A^{-1}G(Y_j^{n,n+1} + Y_{j-1}^{n,n+1}) + 2A^{-1}H) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Faisons la somme des deux équations A.35 et A.36, nous obtenons :

$$\begin{aligned} X_{j+1}' - X_j' + X_j' - X_{j-1}' &= \frac{k_{j+1}}{2}(-A^{-1}B(X_{j+1}' + X_j') - A^{-1}C(X_{j+1} + X_j) + A^{-1}D(Y_{j+1}^{0,1'} + Y_j^{0,1'}) \\ &+ A^{-1}E(Y_{j+1}^{n,n+1'} + Y_j^{n,n+1'}) + A^{-1}F(Y_{j+1}^{0,1} + Y_j^{0,1}) + A^{-1}G(Y_{j+1}^{n,n+1} + Y_j^{n,n+1}) + 2A^{-1}H) \\ &+ \frac{k_j}{2}(-A^{-1}B(X_j' + X_{j-1}') - A^{-1}C(X_j + X_{j-1}) + A^{-1}D(Y_j^{0,1'} + Y_{j-1}^{0,1'}) \\ &+ A^{-1}E(Y_j^{n,n+1'} + Y_{j-1}^{n,n+1'}) + A^{-1}F(Y_j^{0,1} + Y_{j-1}^{0,1}) + A^{-1}G(Y_j^{n,n+1} + Y_{j-1}^{n,n+1}) + 2A^{-1}H) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Comme :

$$X_{j+1}' - X_j' + X_j' - X_{j-1}' = X_{j+1}' + X_j' - (X_j' + X_{j-1}') = \frac{2(X_{j+1} - X_j)}{k_{j+1}} - \frac{2(X_j - X_{j-1})}{k_j} \quad (\text{A.38})$$

En réécrivant dans l'équation A.37 et en regroupant les coefficients des X_{j+1} , X_j , X_{j-1} , $Y_{j+1}^{0,1}$, $Y_j^{0,1}$,

$Y_{j-1}^{0,1}, Y_{j+1}^{n,n+1}, Y_j^{n,n+1}$ et $Y_{j-1}^{n,n+1}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2}{k_{j+1}} [I] + A^{-1}B + \frac{k_{j+1}}{2} A^{-1}C \right) X_{j+1} + \left(- \left(\frac{2}{k_{j+1}} + \frac{2}{k_j} \right) [I] + \left(\frac{k_{j+1}}{2} + \frac{k_j}{2} \right) A^{-1}C \right) X_j \\
& \quad + \left(\frac{2}{k_j} [I] - A^{-1}B + \frac{k_j}{2} A^{-1}C \right) X_{j-1} \\
& = \left(\frac{k_{j+1}}{2} A^{-1}F + A^{-1}D \right) Y_{j+1}^{0,1} + \left(\left(\frac{k_{j+1}}{2} + \frac{k_j}{2} \right) A^{-1}F \right) Y_j^{0,1} + \left(\frac{k_j}{2} A^{-1}F - A^{-1}D \right) Y_{j-1}^{0,1} \\
& \quad + \left(\frac{k_{j+1}}{2} A^{-1}G + A^{-1}E \right) Y_{j+1}^{n,n+1} + \left(\left(\frac{k_{j+1}}{2} + \frac{k_j}{2} \right) A^{-1}G \right) Y_j^{n,n+1} \\
& \quad + \left(\frac{k_j}{2} A^{-1}G - A^{-1}E \right) Y_{j-1}^{n,n+1} + A^{-1}H(k_{j+1} + k_j) \quad (A.39)
\end{aligned}$$

Le système linéaire final à résoudre numériquement s'écrit alors sous la forme matricielle suivante pour $j=2$ à $N-1$:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} O1_j & O2_j & O3_j \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{j-1} \\ X_j \\ X_{j+1} \end{Bmatrix} & = \begin{bmatrix} P1_j & P2_j & P3_j \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_{j-1}^{0,1} \\ Y_j^{0,1} \\ Y_{j+1}^{0,1} \end{Bmatrix} \\
& \quad + \begin{bmatrix} Q1_j & Q2_j & Q3_j \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_{j-1}^{n,n+1} \\ Y_j^{n,n+1} \\ Y_{j+1}^{n,n+1} \end{Bmatrix} + C_j \quad (A.40)
\end{aligned}$$

Les termes $X_{j-1}, X_j, X_{j+1}, Y_{j-1}^{0,1}, Y_j^{0,1}, Y_{j+1}^{0,1}, Y_{j-1}^{n,n+1}, Y_j^{n,n+1}, C_j$ sont détaillés dans le tableau A.2.

Afin d'obtenir les $3n \times 2$ équations manquantes au système général précédent, il nous faut exprimer les conditions aux limites aux bords du multicouche. Ces conditions aux limites s'expriment soit en fonction des déplacements, soit en fonction des efforts ce qui induit des conditions sur les dérivées du vecteur X d'inconnues cinématiques. Ainsi les $2 \times 3n$ équations de conditions limites peuvent s'écrire sous forme matricielle comme ci-dessous :

$$C_{x1}X' + C_{x2}X = C_{x3}Y^{0,1} + C_{x4}Y^{n,n+1} + C \quad (A.41)$$

Les matrices C_{x1} et C_{x2} ont une dimension de $3n \times 3n$ tandis que C_{x3} et C_{x4} en ont une de $3n \times 2$. La matrice C est la matrice des constantes. Comme pour le système matriciel complet, nous réduisons l'ordre du système différentiel A.41 en soustrayant l'approximation de Newmark A.31 à l'équation A.35. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{2(X_{j+1} - X_j)}{k_{j+1}} - 2X_j' & = \frac{k_{j+1}}{2} (-A^{-1}B(X_{j+1}' + X_j') - A^{-1}C(X_{j+1} + X_j) \\
& + A^{-1}D(Y_{j+1}^{0,1'} + Y_j^{0,1'}) + A^{-1}E(Y_{j+1}^{n,n+1'} + Y_j^{n,n+1'}) + A^{-1}F(Y_{j+1}^{0,1} + Y_j^{0,1}) \\
& + A^{-1}G(Y_{j+1}^{n,n+1} + Y_j^{n,n+1}) + 2A^{-1}H) \quad (A.42)
\end{aligned}$$

Finalement, l'expression de la dérivée de X au point j , s'écrit en fonction de X au point j et $j+1$ comme

TABLE A.2 – Tableau récapitulatif des constantes du système linéaire

X_{j-1}	$O1_j = \frac{2}{K_j}[I] - A^{-1}B + \frac{K_j}{2}A^{-1}C$
X_j	$O2_j = -\left(\frac{2}{K_{j+1}} + \frac{2}{K_j}\right)[I] + \left(\frac{K_{j+1}}{2} + \frac{K_j}{2}\right)A^{-1}C$
X_{j+1}	$O3_j = \frac{2}{K_{j+1}}[I] + A^{-1}B + \frac{K_{j+1}}{2}A^{-1}C$
$Y_{j-1}^{0,1}$	$P1_j = \frac{K_j}{2}A^{-1}F - A^{-1}D$
$Y_j^{0,1}$	$P2_j = \left(\frac{K_{j+1}}{2} + \frac{K_j}{2}\right)A^{-1}F$
$Y_{j+1}^{0,1}$	$P3_j = \frac{K_{j+1}}{2}A^{-1}F + A^{-1}D$
$Y_{j-1}^{n,n+1}$	$Q1_j = \frac{K_j}{2}A^{-1}G - A^{-1}E$
$Y_j^{n,n+1}$	$Q2_j = \left(\frac{K_{j+1}}{2} + \frac{K_j}{2}\right)A^{-1}G$
$Y_{j+1}^{n,n+1}$	$Q3_j = \frac{K_{j+1}}{2}A^{-1}G + A^{-1}E$
C_j	$A^{-1}H(k_{j+1} + k_j)$

suit :

$$\begin{aligned}
X'_j = & \left(\frac{A^{-1}B}{2} + \frac{k_{j+1}}{4}A^{-1}C + \frac{1}{k_{j+1}}[I]\right) X_{j+1} + \left(-\frac{A^{-1}B}{2} + \frac{k_{j+1}}{4}A^{-1}C - \frac{1}{k_{j+1}}[I]\right) X_j \\
& - \left(\frac{A^{-1}D}{2} + \frac{k_{j+1}}{4}A^{-1}F\right) Y_{j+1}^{0,1} + \left(\frac{A^{-1}D}{2} - \frac{k_{j+1}}{4}A^{-1}F\right) Y_j^{0,1} \\
& - \left(\frac{A^{-1}E}{2} + \frac{k_{j+1}}{4}A^{-1}G\right) Y_{j+1}^{n,n+1} + \left(\frac{A^{-1}E}{2} - \frac{k_{j+1}}{4}A^{-1}G\right) Y_j^{n,n+1} + k_{j+1}A^{-1}H \quad (\text{A.43})
\end{aligned}$$

Cette expression A.43 écrite au point $j=0$ dans l'équation A.41 donne le système de $3n$ équations de conditions aux limites manquantes du système A.30 au point $x=0$, soit :

$$\begin{aligned}
Cx_1 \left(A^{-1}\left(\frac{B}{2} + \frac{k_2}{4}C\right) + \frac{1}{k_2}[I]\right) X_2 + Cx_1 \left(A^{-1}\left(-\frac{B}{2} + \frac{k_2}{4}C\right) - \frac{1}{k_2}[I]\right) X_1 \\
+ Cx_1 A^{-1}\left(-\frac{D}{2} - \frac{k_2}{4}F\right) Y_2^{0,1} + Cx_1 A^{-1}\left(\frac{D}{2} - \frac{k_2}{4}F\right) Y_1^{0,1} \\
+ Cx_1 A^{-1}\left(-\frac{E}{2} - \frac{k_2}{4}G\right) Y_2^{n,n+1} + Cx_1 A^{-1}\left(\frac{E}{2} - \frac{k_2}{4}G\right) Y_1^{n,n+1} \\
+ Cx_2 X_1 = Cx_3 Y_1^{0,1} + Cx_4 Y_1^{n,n+1} - Cx_1 A^{-1}HK_2 \quad (\text{A.44})
\end{aligned}$$

D'autre part, si on réécrit l'équation A.31 entre les points j et $j-1$ et on l'additionne à l'équation A.36,

on obtient :

$$\begin{aligned}
X'_j = & \frac{k_j}{4}(-2A^{-1}B \frac{(X_j - X_{j-1})}{k_j} - A^{-1}C(X_j + X_{j-1}) + 2A^{-1}D \frac{(Y_j^{0,1} - Y_{j-1}^{0,1})}{k_j} \\
& + 2A^{-1}E \frac{(Y_j^{n,n+1} - Y_{j-1}^{n,n+1})}{k_j} + A^{-1}F(Y_j^{0,1} + Y_{j-1}^{0,1}) + A^{-1}G(Y_j^{n,n+1} + Y_{j-1}^{n,n+1}) \\
& + 2A^{-1}H) + \frac{(X_j - X_{j-1})}{k_j} \quad (\text{A.45})
\end{aligned}$$

Finalement, l'expression de la dérivée de X au point j en fonction des points j et j-1 s'écrit sous la forma suivante :

$$\begin{aligned}
X'_j = & X_j \left(\frac{1}{k_j}[I] - \frac{A^{-1}B}{2} - \frac{k_j}{4}A^{-1}C \right) + X_{j-1} \left(-\frac{1}{k_j}[I] + \frac{A^{-1}B}{2} - \frac{k_j}{4}A^{-1}C \right) \\
& + Y_j^{0,1} \left(\frac{A^{-1}D}{2} + \frac{k_j}{4}A^{-1}F \right) + Y_{j-1}^{0,1} \left(-\frac{A^{-1}D}{2} + \frac{k_j}{4}A^{-1}F \right) \\
& + Y_j^{n,n+1} \left(\frac{A^{-1}E}{2} + \frac{k_j}{4}A^{-1}G \right) + Y_{j-1}^{n,n+1} \left(-\frac{A^{-1}E}{2} + \frac{k_j}{4}A^{-1}G \right) + \frac{k_j}{2}A^{-1}H \quad (\text{A.46})
\end{aligned}$$

Cette expression A.46 écrite au point j=N dans l'équation A.41 donne le système de 3xn équations de conditions aux limites manquantes du système A.30 au point x=L, soit :

$$\begin{aligned}
Cx_1 \left(-A^{-1} \left(\frac{B}{2} + \frac{k_N}{4}C \right) + \frac{1}{k_N}[I] \right) X_N + Cx_1 \left(A^{-1} \left(\frac{B}{2} - \frac{k_N}{4}C \right) - \frac{1}{k_N}[I] \right) X_{N-1} \\
+ Cx_1 A^{-1} \left(\frac{D}{2} + \frac{k_N}{4}F \right) Y_N^{0,1} + Cx_1 A^{-1} \left(-\frac{D}{2} + \frac{k_N}{4}F \right) Y_{N-1}^{0,1} \\
+ Cx_1 A^{-1} \left(\frac{E}{2} + \frac{k_N}{4}G \right) Y_N^{n,n+1} + Cx_1 A^{-1} \left(-\frac{E}{2} + \frac{k_N}{4}G \right) Y_{N-1}^{n,n+1} \\
+ Cx_2 X_N = Cx_3 Y_N^{0,1} + Cx_4 Y_N^{n,n+1} - Cx_1 A^{-1} H \frac{K_N}{2} \quad (\text{A.47})
\end{aligned}$$

Au final, nous pouvons regrouper les termes en $X_1, X_2, Y_1^{0,1}, Y_2^{0,1}, Y_1^{3,4}, Y_1^{3,4}$ comme donné dans le tableau A.3 :

De même, pour le point j=N, en regroupant les termes $X_N, X_{N-1}, Y_N^{0,1}, Y_{N-1}^{0,1}, Y_N^{n,n+1}, Y_{N-1}^{n,n+1}$, nous trouvons (Tableau A.4

Finalement, les formes matricielles du système A.30 à résoudre numériquement s'écrivent de la manière suivante, lorsque le multicouche considéré n'a pas de fissure verticale dans l'épaisseur d'une ou plusieurs de ses couches :

TABLE A.3 – Tableau des matrices des conditions aux limites au point $j=1$

X_2	$[T_1] = Cx_1 \left(\frac{A^{-1}B}{2} + \frac{K_2}{2}A^{-1}C + \frac{1}{K_2}[I] \right)$
X_1	$[R_1] = Cx_1 \left(-\frac{A^{-1}B}{2} + \frac{K_2}{4}A^{-1}C - \frac{1}{K_2}[I] \right) + Cx_2$
$Y_2^{0,1}$	$[S_1] = Cx_1 \left(\frac{A^{-1}D}{2} + \frac{K_2}{4}A^{-1}F \right)$
$Y_1^{0,1}$	$[V_1] = -Cx_1 \left(\frac{A^{-1}D}{2} - \frac{K_2}{4}A^{-1}F \right) + Cx_3$
$Y_2^{n,n+1}$	$[K_1] = Cx_1 \left(\frac{A^{-1}E}{2} + \frac{K_2}{4}A^{-1}G \right)$
$Y_1^{n,n+1}$	$[L_1] = -Cx_1 \left(\frac{A^{-1}E}{2} - \frac{K_2}{4}A^{-1}G \right) + Cx_4$
C_1	$-Cx_1A^{-1}Hk_2$

$$\begin{bmatrix}
[R_{1(3n \times 3n)}] & [T_{1(3n \times 3n)}] & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
O_{12(3n \times 3n)} & O_{22(3n \times 3n)} & O_{32(3n \times 3n)} & \cdot \\
0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & O_{1j-1(12 \times 12)} & O_{2j-1(12 \times 12)} & O_{3j-1(12 \times 12)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & O_{1j(3n \times 3n)} & O_{2j(3n \times 3n)} & O_{3j(3n \times 3n)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & O_{1j+1(3n \times 3n)} & O_{2j+1(3n \times 3n)} & O_{3j+1(3n \times 3n)} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 0 \\
\cdot & O_{1N-1(3n \times 3n)} & O_{2N-1(3n \times 3n)} & O_{3N-1(3n \times 3n)} \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & [R_{N(3n \times 3n)}] & [T_{N(3n \times 3n)}]
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ X_{j-1} \\ X_j \\ X_{j+1} \\ \cdot \\ X_{N-1} \\ X_N \end{pmatrix}
+
\begin{bmatrix}
[V_{1(3n \times 2)}] & [S_{1(3n \times 2)}] & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
P_{12(3n \times 2)} & P_{22(3n \times 2)} & P_{32(3n \times 2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & P_{1j-1(3n \times 2)} & P_{2j-1(3n \times 2)} & P_{3j-1(3n \times 2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & P_{1j(3n \times 2)} & P_{2j(3n \times 2)} & P_{3j(3n \times 2)} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_{1j+1(3n \times 2)} & P_{2j+1(3n \times 2)} & P_{3j+1(3n \times 2)} & \cdot & \cdot \\
\cdot & 0 \\
\cdot & P_{1N-1(3n \times 2)} & P_{2N-1(3n \times 2)} & P_{3N-1(3n \times 2)} \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & [V_{N(3n \times 2)}] & [S_{N(3n \times 2)}]
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} Y_1^{0,1} \\ Y_2^{0,1} \\ \cdot \\ Y_{j-1}^{0,1} \\ Y_j^{0,1} \\ Y_{j+1}^{0,1} \\ \cdot \\ Y_{N-1}^{0,1} \\ Y_N^{0,1} \end{pmatrix}
+
\begin{bmatrix}
[L_{1(3n \times 2)}] & [K_{1(3n \times 2)}] & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
Q_{12(3n \times 2)} & Q_{22(3n \times 2)} & Q_{32(3n \times 2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & Q_{1j-1(3n \times 2)} & Q_{2j-1(3n \times 2)} & Q_{3j-1(12 \times 12)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & Q_{1j(3n \times 2)} & Q_{2j(3n \times 2)} & Q_{3j(3n \times 2)} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{1j+1(3n \times 2)} & Q_{2j+1(3n \times 2)} & Q_{3j+1(3n \times 2)} & \cdot & \cdot \\
\cdot & 0 \\
\cdot & Q_{1N-1(12 \times 12)} & Q_{2N-1(3n \times 2)} & Q_{3N-1(3n \times 2)} \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & [L_{N(3n \times 2)}] & [K_{N(3n \times 2)}]
\end{bmatrix}
\begin{pmatrix} Y_1^{n,n+1} \\ Y_2^{n,n+1} \\ \cdot \\ Y_{j-1}^{n,n+1} \\ Y_j^{n,n+1} \\ Y_{j+1}^{n,n+1} \\ \cdot \\ Y_{N-1}^{n,n+1} \\ Y_N^{n,n+1} \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ C_{j-1} \\ C_j \\ C_{j+1} \\ \cdot \\ C_{N-1} \\ C_N \end{pmatrix}
\tag{A.48}$$

A.5 Introduction des conditions aux limites type fissure verticale

Par la suite, pour introduire une fissure verticale dans une couche i d'un multicouche à n couches entre deux points f et $f+1$, nous allons assimiler le multicouche à un tricouche. En effet, les différentes couches au dessus de la fissure sont considérées comme une seule et même couche : en utilisant une

TABLE A.4 – Tableau des matrices des conditions aux limites au point $j=N$

X_N	$[T_N] = Cx_1 \left(-\frac{A^{-1}B}{2} - \frac{K_N}{4}A^{-1}C + \frac{1}{K_N}[I] \right) + Cx_2$
X_{N-1}	$[R_N] = Cx_1 \left(\frac{A^{-1}B}{2} - \frac{K_N}{4}A^{-1}C - \frac{1}{K_N}[I] \right)$
$Y_N^{0,1}$	$[S_N] = -Cx_1 \left(\frac{A^{-1}D}{2} + \frac{K_N}{4}A^{-1}F \right) + Cx_3$
$Y_{N-1}^{0,1}$	$[V_N] = -Cx_1 \left(-\frac{A^{-1}D}{2} + \frac{K_N}{4}A^{-1}F \right)$
$Y_N^{n,n+1}$	$[K_N] = -Cx_1 \left(\frac{A^{-1}E}{2} + \frac{K_N}{4}A^{-1}G \right) + Cx_4$
$Y_{N-1}^{n,n+1}$	$[L_N] = -Cx_1 \left(-\frac{A^{-1}E}{2} + \frac{K_2}{4}A^{-1}G \right)$
C_N	$-Cx_1 A^{-1}H \frac{k_N}{2}$

numérotation de ces couches de haut en bas, la couche numéro 1 ; puis celle, où la fissure est introduit, la couche numéro 2 et le reste des couches au dessous de la fissure, la couche numéro 3 comme le montre le schéma de la figure A.2

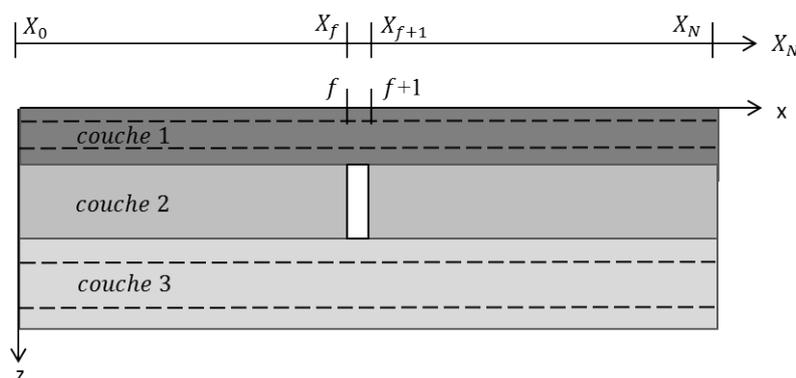


FIGURE A.2 – Schéma représentant un multicouche fissuré

La fissure introduite n'existe que sur une seule et même couche, plus particulièrement dans notre cas, la couche 2. Elle possède une épaisseur donnée que nous discrétisons par une seule maille de maillage M4-5n afin de ne pas fausser les matrices de rigidité en enlevant de la matière si on se plaçait entre plusieurs mailles.

Au niveau des équations, nous devons introduire des conditions aux limites de bord libre dans l'écriture du système matriciel globale :

$$\mathbb{A}\{X\} = \mathbb{B}\{Y^{0,1}\} + \mathbb{C}\{Y^{n,n+1}\} \quad (\text{A.49})$$

En zoomant dans la partie encadrée, nous obtenons l'équation A.54

$$\begin{bmatrix} P1_{f(3 \times 2)} & P2_{f(3 \times 2)} & P3_{f(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 2)} \\ V_{f(3 \times 2)} & S_{f(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 2)} \\ P1_{f(3 \times 2)} & P2_{f(3 \times 2)} & P3_{f(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 2)} \\ 0_{(3 \times 2)} & P1_{f+1(3 \times 2)} & P2_{f+1(3 \times 2)} & P3_{f+1(3 \times 2)} \\ 0_{(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 2)} & V_{f+1(3 \times 2)} & S_{f+1(3 \times 2)} \\ 0_{(3 \times 2)} & P1_{f+1(3 \times 2)} & P2_{f+1(3 \times 2)} & P3_{f+1(3 \times 2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_f^{0,1} \text{ couche}_1 \\ Y_f^{0,1} \text{ couche}_2 \\ Y_f^{0,1} \text{ couche}_3 \\ Y_{f+1}^{0,1} \text{ couche}_1 \\ Y_{f+1}^{0,1} \text{ couche}_2 \\ Y_{f+1}^{0,1} \text{ couche}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{bmatrix} L1_{(3n \times 2)} & k1_{(3n \times 2)} & 0 & \cdot & 0 \\ Q1_{2(3n \times 2)} & Q2_{2(3n \times 2)} & Q3_{2(3n \times 2)} & 0 & \cdot \\ 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & Q1_{f-1(3n \times 2)} & Q2_{f-1(3n \times 2)} & Q3_{f-1(3n \times 2)} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \boxed{CL1_{f(3n \times 2)}} & \boxed{CL2_{f(3n \times 2)}} & \boxed{CL3_{f(3n \times 2)}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \boxed{CL1_{f+1(3n \times 2)}} & \boxed{CL2_{f+1(3n \times 2)}} & \boxed{CL3_{f+1(3n \times 2)}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & Q1_{f+2(3n \times 2)} & Q2_{f+2(3n \times 2)} & Q3_{f+2(3n \times 2)} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & Q1_{N-1(3n \times 2)} & Q2_{N-1(3n \times 2)} & Q3_{N-1(3n \times 2)} \\ 0 & \cdot & 0 & [L_{N(3n \times 2)}] & [K_{N(3n \times 2)}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1^{n,n+1} \\ Y_2^{n,n+1} \\ \cdot \\ Y_{f-1}^{n,n+1} \\ Y_f^{n,n+1} \\ Y_{f+1}^{n,n+1} \\ Y_{f+2}^{n,n+1} \\ \cdot \\ Y_{N-1}^{0,1} \\ Y_N^{0,1} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.55})$$

En zoomant dans la partie encadrée, nous obtenons l'équation A.56

$$\begin{bmatrix} Q1_{f(3 \times 2)} & Q2_{f(3 \times 2)} & Q3_{f(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 2)} \\ L_{f(3 \times 2)} & K_{f(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 2)} \\ Q1_{f(3 \times 2)} & Q2_{f(3 \times 2)} & Q3_{f(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 2)} \\ 0_{(3 \times 2)} & Q1_{f+1(3 \times 2)} & Q2_{f+1(3 \times 2)} & Q3_{f+1(3 \times 2)} \\ 0_{(3 \times 2)} & 0_{(3 \times 2)} & L_{f+1(3 \times 2)} & K_{f+1(3 \times 2)} \\ 0_{(3 \times 2)} & Q1_{f+1(3 \times 2)} & Q2_{f+1(3 \times 2)} & Q3_{f+1(3 \times 2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_f^{n,n+1} \text{ couche}_1 \\ Y_f^{n,n+1} \text{ couche}_2 \\ Y_f^{n,n+1} \text{ couche}_3 \\ Y_{f+1}^{n,n+1} \text{ couche}_1 \\ Y_{f+1}^{n,n+1} \text{ couche}_2 \\ Y_{f+1}^{n,n+1} \text{ couche}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.56})$$

A.6 Obtention des inconnues secondaires

Après avoir résoudre le système d'équations A.30 en posant comme inconnues principales $U_1^i(x)$, $\phi_1^i(x)$, $U_3^i(x)$, nous pouvons maintenant déduire les inconnues secondaires à partir des équations A.3 et A.5 respectivement. Quant aux expressions des efforts de cisaillement d'interface $\tau_1^{i,i+1}(x)$, nous avons combiné les équations d'interface A.18 appliquées entre les couches i et $i+1$. Pour les expressions des efforts normaux d'arrachement $\nu^{i,i+1}(x)$, nous avons combiné les équations d'interface A.19 appliquées entre les mêmes couches.

Annexe B

Calcul des matrices nécessaires pour la résolution par la méthode des différences finies : cas 2D de référence

Sont rapportés dans cette annexe les résultats d'écriture analytique des matrices obtenues pour $n=4$ couches à l'aide de la méthode précédente et le logiciel Mathematica (Nasser and Chabot, 2016).

B.1 Matrices du système général à résoudre

Let's note

$$\lambda^i = \frac{e^i (1-\nu^i)}{E^i}, \kappa^i = \frac{e^i}{E^i} \quad (\text{eq.1})$$

$$\Delta 1 = \left(\frac{\lambda^3}{12}\right)^2 \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{4}\right) + \left(\frac{\lambda^2}{12}\right)^2 \left(\frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^4}{4}\right) - \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{4}\right) \left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{4}\right) \left(\frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^4}{4}\right) \quad (\text{eq.2})$$

$$\Delta 2 = 13 \left(\left(\frac{9\kappa^3}{2\ 35}\right)^2 \left(\frac{\kappa^1}{35} + \frac{\kappa^2}{35}\right) + \left(\frac{9\kappa^2}{2\ 35}\right)^2 - 13^2 \left(\frac{\kappa^1}{35} + \frac{\kappa^2}{35}\right) \left(\frac{\kappa^2}{35} + \frac{\kappa^3}{35}\right) \right) \left(\frac{\kappa^3}{35} + \frac{\kappa^4}{35}\right) \quad (\text{eq.3})$$

and let's notice that all coefficients written in the following matrixes A, B and C are proportional to the quotients $1/\kappa^i$ that is to say $\frac{E^i}{e^i}$ and to 1 in the matrixes D, E, F and G.

Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{e^1 E^1}{1-\nu^1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{1^2} E^1}{5(1-\nu^{1^2})} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^1 A_{33} & 0 & 0 & e^2 A_{36} & 0 & 0 & -e^3 A_{39} & 0 & 0 & -e^4 A_{312} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^2 E^2}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{2^2} E^2}{5(1-\nu^{2^2})} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^1 A_{36} & 0 & 0 & e^2 A_{66} & 0 & 0 & -e^3 A_{69} & 0 & 0 & -e^4 A_{612} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^3 E^3}{1-\nu^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{3^2} E^3}{5(1-\nu^{3^2})} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^1 A_{39} & 0 & 0 & -e^2 A_{69} & 0 & 0 & e^3 A_{99} & 0 & 0 & e^4 A_{912} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^4 E^4}{1-\nu^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e^{4^2} E^4}{5(1-\nu^{4^2})} & 0 \\ 0 & 0 & -e^1 A_{312} & 0 & 0 & -e^2 A_{612} & 0 & 0 & e^3 A_{912} & 0 & 0 & e^4 A_{1212} \end{pmatrix}$$

$$A_{33} = \frac{5E^1}{e^1(1+\nu^1)} + a_{33} \quad , \quad A_{66} = \frac{5E^2}{e^2(1+\nu^2)} + a_{66}$$

$$A_{99} = \frac{5E^3}{e^3(1+\nu^3)} + a_{99} \quad , \quad A_{1212} = \frac{5E^4}{e^4(1+\nu^4)} + a_{1212} \quad (\text{eq.4})$$

With the following 6 A_{jk} and 4 a_{jk} coefficients

$$a_{33} = \frac{1}{12\Delta 1} \left(\left(\frac{\lambda^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{4}\right) \left(\frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^4}{4}\right) \right) ; \quad A_{36} = \frac{1}{12\Delta 1} \left(\left(\frac{\lambda^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^3}{4}\right) \left(\frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^4}{4}\right) \right)$$

$$A_{39} = \frac{\lambda^2}{12^2 \Delta 1} \left(\frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4}\right) ; \quad A_{312} = \frac{\lambda^2 \lambda^3}{12^3 \Delta 1} ; \quad a_{66} = \frac{1}{12\Delta 1} \left(\left(\frac{\lambda^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{2\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^3}{4}\right) \left(\frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^4}{4}\right) \right)$$

$$A_{69} = \frac{1}{12\Delta 1} \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{3}\right) \left(\frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4}\right) ; \quad A_{612} = \frac{\lambda^3}{12^2 \Delta 1} \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{3}\right) \quad (\text{eq.5})$$

$$a_{99} = \frac{1}{12\Delta 1} \left(\left(\frac{\lambda^2}{12}\right)^2 - \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{4}\right) \left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{2\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4}\right) \right)$$

$$A_{912} = \frac{1}{12\Delta 1} \left(\left(\frac{\lambda^2}{12}\right)^2 - \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{4}\right) \left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{3}\right) \right) ; \quad a_{1212} = \frac{1}{12\Delta 1} \left(\left(\frac{\lambda^2}{12}\right)^2 - \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{4}\right) \left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{4}\right) \right)$$

Matrix B

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{e^1}{12}B_{13} & 0 & 0 & \frac{e^2}{12}B_{16} & 0 & 0 & \frac{-e^3}{12}B_{19} & 0 & 0 & \frac{-e^4}{12}B_{112} \\ 0 & 0 & e^1B_{23} & 0 & 0 & \frac{e^2}{12}B_{16} & 0 & 0 & \frac{-e^3}{12}B_{19} & 0 & 0 & \frac{-e^4}{12}B_{112} \\ -B_{13} & -\frac{5e^1}{12}B_{23} & 0 & B_{34} & -\frac{5e^2}{12}B_{16} & 0 & -B_{37} & \frac{5e^3}{12}B_{19} & 0 & -B_{112} & \frac{5e^4}{12}B_{112} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{e^1}{12}B_{34} & 0 & 0 & -\frac{e^2}{12}B_{46} & 0 & 0 & \frac{-e^3}{12}B_{49} & 0 & 0 & \frac{-e^4}{12}B_{412} \\ 0 & 0 & \frac{e^1}{12}B_{16} & 0 & 0 & \frac{e^2}{12}B_{56} & 0 & 0 & \frac{-e^3}{12}B_{59} & 0 & 0 & \frac{-e^4}{12}B_{512} \\ -B_{16} & -\frac{5e^1}{12}B_{16} & 0 & B_{46} & -\frac{5e^2}{12}B_{56} & 0 & -B_{67} & \frac{5e^3}{12}B_{59} & 0 & -B_{512} & \frac{5e^4}{12}B_{512} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^1}{12}B_{37} & 0 & 0 & \frac{e^2}{12}B_{67} & 0 & 0 & \frac{e^3}{12}B_{79} & 0 & 0 & \frac{e^4}{12}B_{712} \\ 0 & 0 & -\frac{e^1}{12}B_{19} & 0 & 0 & -\frac{e^2}{12}B_{59} & 0 & 0 & \frac{e^3}{12}B_{89} & 0 & 0 & \frac{e^4}{12}B_{812} \\ B_{19} & \frac{5e^1}{12}B_{19} & 0 & B_{49} & \frac{5e^2}{12}B_{59} & 0 & -B_{79} & -\frac{5e^3}{12}B_{89} & 0 & B_{812} & \frac{-5e^4}{12}B_{812} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^1}{12}B_{112} & 0 & 0 & \frac{e^2}{12}B_{512} & 0 & 0 & \frac{-e^3}{12}B_{812} & 0 & 0 & \frac{-e^4}{12}B_{1012} \\ 0 & 0 & -\frac{e^1}{12}B_{112} & 0 & 0 & -\frac{e^2}{12}B_{512} & 0 & 0 & \frac{e^3}{12}B_{812} & 0 & 0 & \frac{e^4}{12}B_{1112} \\ B_{112} & \frac{5e^1}{12}B_{112} & 0 & B_{412} & \frac{5e^2}{12}B_{512} & 0 & -B_{712} & \frac{-5e^3}{12}B_{812} & 0 & B_{1012} & \frac{-5e^4}{12}B_{1112} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} B_{23} &= \frac{-12E^1}{e^1(1+\nu^1)} + B_{13} \quad , \quad B_{56} = \frac{-12E^2}{e^2(1+\nu^2)} + b_{56} \\ B_{89} &= \frac{-12E^3}{e^3(1+\nu^3)} + b_{89} \quad , \quad B_{1112} = \frac{-12E^4}{e^4(1+\nu^4)} + B_{1012} \end{aligned} \quad (\text{eq.6})$$

With the following 16 B_{jk} and 2 b_{jk} coefficients (some of them are linked to the previous A_{jk} ones)

$$\begin{aligned} B_{13} &= 12a_{33} ; B_{16} = 12A_{36} ; B_{19} = 12A_{39} ; B_{112} = 12A_{312} \\ B_{34} &= \frac{1}{\Delta 1} \left(\left(\frac{\lambda^3}{12} \right)^2 - \left(\frac{\lambda^2}{6} + \frac{\lambda^3}{4} \right) \left(\frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^4}{4} \right) \right) ; B_{37} = \frac{\lambda^2}{12\Delta 1} \left(\frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^4}{4} \right) \\ B_{46} &= \frac{1}{\Delta 1} \left(\left(\frac{\lambda^3}{12} \right)^2 - \left(-\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^3}{4} \right) \left(\frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^4}{4} \right) \right) ; B_{49} = \frac{1}{\Delta 1} \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{6} \right) \left(\frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4} \right) \\ B_{412} &= \frac{\lambda^3}{12\Delta 1} \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{6} \right) ; b_{56} = 12a_{66} ; B_{59} = 12A_{69} ; B_{512} = 12A_{612} \\ B_{67} &= \frac{1}{\Delta 1} \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{3} \right) \left(\frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^4}{4} \right) ; B_{79} = \frac{1}{\Delta 1} \left(\left(\frac{\lambda^2}{12} \right)^2 + \left(\frac{\lambda^1}{3} + \frac{\lambda^2}{4} \right) \left(-\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{4} \right) \right) \\ B_{712} &= \frac{1}{\Delta 1} \left(\left(\frac{\lambda^2}{12} \right)^2 - \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \right) \left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{6} \right) \right) ; b_{89} = 12a_{99} ; B_{812} = 12A_{912} ; B_{1012} = 12a_{1212} \end{aligned} \quad (\text{eq.7})$$

Matrix C

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix}
 -C_{11} & \frac{-5e^1}{12}C_{11} & 0 & C_{14} & \frac{-5e^2}{12}C_{15} & 0 & -C_{17} & \frac{5e^3}{12}C_{18} & 0 & -C_{110} & \frac{5e^4}{12}C_{110} & 0 \\
 -C_{11} & \frac{-5e^1}{12}C_{22} & 0 & C_{14} & \frac{-5e^2}{12}C_{15} & 0 & -C_{17} & \frac{5e^3}{12}C_{18} & 0 & -C_{110} & \frac{5e^4}{12}C_{110} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{-12}{e^1}C_{33} & 0 & 0 & \frac{12}{e^1}C_{36} & 0 & 0 & \frac{12}{e^1}C_{39} & 0 & 0 & \frac{-12}{e^1}C_{312} \\
 C_{14} & \frac{5e^1}{12}C_{14} & 0 & -C_{44} & \frac{5e^2}{12}C_{45} & 0 & -C_{47} & \frac{5e^3}{12}C_{48} & 0 & -C_{410} & \frac{5e^4}{12}C_{410} & 0 \\
 C_{15} & \frac{-5e^1}{12}C_{15} & 0 & C_{45} & \frac{-5e^2}{12}C_{55} & 0 & -C_{57} & \frac{5e^3}{12}C_{58} & 0 & -C_{510} & \frac{5e^4}{12}C_{510} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{12}{e^2}C_{36} & 0 & 0 & \frac{-12}{e^2}C_{66} & 0 & 0 & \frac{-12}{e^2}C_{69} & 0 & 0 & \frac{12}{e^2}C_{612} \\
 -C_{17} & \frac{-5e^1}{12}C_{17} & 0 & -C_{47} & \frac{-5e^2}{12}C_{57} & 0 & -C_{77} & \frac{-5e^3}{12}C_{78} & 0 & C_{710} & \frac{-5e^4}{12}C_{710} & 0 \\
 C_{18} & \frac{5e^1}{12}C_{18} & 0 & C_{48} & \frac{5e^2}{12}C_{58} & 0 & -C_{78} & \frac{-5e^3}{12}C_{88} & 0 & C_{810} & \frac{-5e^4}{12}C_{810} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{12}{e^3}C_{39} & 0 & 0 & \frac{-12}{e^3}C_{69} & 0 & 0 & \frac{-12}{e^3}C_{99} & 0 & 0 & \frac{12}{e^3}C_{912} \\
 -C_{110} & \frac{-5e^1}{12}C_{110} & 0 & -C_{410} & \frac{-5e^2}{12}C_{510} & 0 & C_{710} & \frac{5e^3}{12}C_{810} & 0 & -C_{1010} & \frac{5e^4}{12}C_{1010} & 0 \\
 C_{110} & \frac{5e^1}{12}C_{110} & 0 & C_{410} & \frac{5e^2}{12}C_{510} & 0 & -C_{711} & \frac{-5e^3}{12}C_{810} & 0 & C_{1010} & \frac{-5e^4}{12}C_{1010} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{-12}{e^4}C_{312} & 0 & 0 & \frac{12}{e^4}C_{612} & 0 & 0 & \frac{12}{e^4}C_{912} & 0 & 0 & \frac{-12}{e^4}C_{1212}
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 C_{22} &= \frac{12E^1}{5e^1(1+\nu^1)} + C_{11} \quad , \quad C_{55} = \frac{12E^2}{5e^2(1+\nu^2)} + C_{55} \\
 C_{88} &= \frac{12E^3}{5e^3(1+\nu^3)} + C_{88} \quad , \quad C_{1111} = \frac{12E^4}{5e^4(1+\nu^4)} + C_{1010}
 \end{aligned} \tag{eq.8}$$

The 30 C_{jk} and 2 c_{jk} coefficients are proportional to the quotients: $\frac{E^i}{e^i}$ (some of them are linked to the previous A_{jk} and B_{jk} ones).

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= 12a_{33}; C_{14} = B_{34}; C_{15} = 12A_{36}; C_{17} = B_{37}; C_{18} = 12A_{39}; C_{110} = 12A_{312} \\
 C_{33} &= \frac{1}{\Delta_2} \left(\left(\frac{9\kappa^3}{2 \cdot 35} \right)^2 - 13^2 \left(\frac{\kappa^2}{35} + \frac{\kappa^3}{35} \right) \left(\frac{\kappa^3}{35} + \frac{\kappa^4}{35} \right) \right) \\
 C_{36} &= \frac{1}{\Delta_2} \left(\left(\frac{9\kappa^3}{2 \cdot 35} \right)^2 - 13 \left(\frac{\kappa^2}{2} + \frac{13\kappa^3}{35} \right) \left(\frac{\kappa^3}{35} + \frac{\kappa^4}{35} \right) \right); C_{39} = \frac{1}{\Delta_2} \left(\frac{9\kappa^2}{2 \cdot 35} \right) \left(\frac{\kappa^3}{2} + \frac{13\kappa^4}{35} \right) \\
 C_{312} &= \frac{1}{\Delta_2} \left(\frac{9\kappa^2}{2 \cdot 35} \right) \left(\frac{9\kappa^3}{2 \cdot 35} \right); C_{44} = \frac{1}{\Delta_1} \left(\left(\frac{\lambda^3}{12} \right)^2 - \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^3}{4} \right) \left(\frac{\lambda^3}{4} + \frac{\lambda^4}{4} \right) \right); C_{45} = B_{46} \\
 C_{47} &= \frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{6} \right) \left(\frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^4}{4} \right); C_{48} = B_{49}; C_{410} = B_{412} \\
 C_{55} &= 12a_{66}; C_{57} = \frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{3} \right) \left(\frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^4}{4} \right); C_{58} = 12A_{69}; C_{510} = 12A_{612} \\
 C_{66} &= \frac{1}{\Delta_2} \left(\left(\frac{9\kappa^3}{2 \cdot 35} \right)^2 - 13 \left(\frac{13\kappa^1}{35} + \kappa^2 + \frac{13\kappa^3}{35} \right) \left(\frac{\kappa^3}{35} + \frac{\kappa^4}{35} \right) \right); C_{69} = \frac{1}{\Delta_2} \left(\frac{13\kappa^1}{35} + \frac{\kappa^2}{2} \right) \left(\frac{\kappa^3}{2} + \frac{13\kappa^4}{35} \right) \\
 C_{612} &= \frac{1}{\Delta_2} \left(\frac{9\kappa^3}{2 \cdot 35} \right) \left(\frac{13\kappa^1}{35} + \frac{\kappa^2}{2} \right); C_{77} = \frac{1}{\Delta_1} \left(\left(\frac{\lambda^2}{12} \right)^2 - \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \right) \left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4} \right) \right) \\
 C_{78} &= \frac{1}{\Delta_1} \left(\left(\frac{\lambda^2}{12} \right)^2 - \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \right) \left(\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^4}{4} \right) \right); C_{710} = \frac{1}{\Delta_1} \left(\left(\frac{\lambda^2}{12} \right)^2 - \left(\frac{\lambda^1}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \right) \left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{6} \right) \right) \\
 C_{88} &= 12a_{99}; C_{810} = 12A_{912}; C_{99} = \frac{1}{\Delta_2} \left(\left(\frac{9\kappa^2}{2 \cdot 35} \right)^2 - 13 \left(\frac{\kappa^1}{35} + \frac{\kappa^2}{35} \right) \left(\frac{13\kappa^2}{35} + \kappa^3 + \frac{13\kappa^4}{35} \right) \right) \\
 C_{912} &= \frac{1}{\Delta_2} \left(\left(\frac{9\kappa^2}{2 \cdot 35} \right)^2 - 13 \left(\frac{\kappa^1}{35} + \frac{\kappa^2}{35} \right) \left(\frac{13\kappa^2}{35} + \frac{\kappa^3}{2} \right) \right); C_{1010} = 12A_{1212} \\
 C_{1212} &= \frac{1}{\Delta_2} \left(\left(\frac{9\kappa^2}{2 \cdot 35} \right)^2 - 13^2 \left(\frac{\kappa^1}{35} + \frac{\kappa^2}{35} \right) \left(\frac{\kappa^2}{35} + \frac{\kappa^3}{35} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{eq.9}$$

Matrix D and E

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 - D_{31} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -D_{61} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{91} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{121} & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ E_{31} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ E_{61} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -E_{91} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 - E_{121} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{eq.10})$$

The 4 D_{jk} and E_{jk} coefficients are:

$$\begin{aligned} D_{31} &= \lambda^1 a_{11}; D_{61} = \lambda^1 A_{36}; D_{91} = \lambda^1 A_{39}; D_{121} = \lambda^1 A_{312} \\ E_{31} &= \lambda^4 A_{312}; E_{61} = \lambda^4 A_{612}; E_{91} = \lambda^4 A_{912}; E_{121} = \lambda^4 A_{1212} \end{aligned} \quad (\text{eq.11})$$

Matrix F

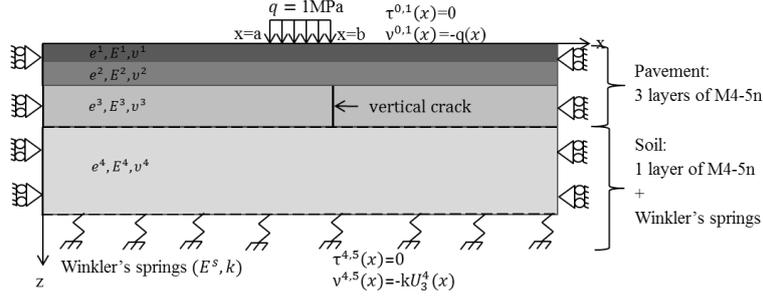
$$F = \begin{pmatrix} 1 - F_{11} & 0 \\ -1 - F_{11} & 0 \\ 0 & \frac{12}{e^1} (1 + F_{32}) \\ F_{41} & 0 \\ -F_{51} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{e^2} F_{62} \\ -F_{71} & 0 \\ F_{81} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{e^3} F_{92} \\ -F_{101} & 0 \\ F_{101} & 0 \\ 0 & \frac{12}{e^4} F_{122} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 \\ G_{11} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{e^1} G_{32} \\ G_{41} & 0 \\ G_{51} & 0 \\ 0 & \frac{12}{e^2} G_{62} \\ -G_{71} & 0 \\ -G_{81} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{e^3} G_{92} \\ -1 + G_{101} & 0 \\ -1 - G_{101} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{e^4} (1 + G_{122}) \end{pmatrix} \quad (\text{eq.12})$$

The 10 F_{jk} and 10 G_{jk} coefficients are:

$$\begin{aligned} F_{11} &= \lambda^1 a_{33}; F_{32} = \left(\frac{9 \kappa^1}{2 \cdot 35}\right) C_{33}; F_{41} = \frac{\lambda^1}{12} B_{34}; F_{51} = \lambda^1 A_{36}; F_{62} = \left(\frac{9 \kappa^1}{2 \cdot 35}\right) C_{36} \\ F_{71} &= \frac{\lambda^1}{12} B_{37}; F_{81} = \lambda^1 A_{39}; F_{92} = \left(\frac{9 \kappa^1}{2 \cdot 35}\right) C_{39}; F_{101} = \lambda^1 A_{312}; F_{122} = \left(\frac{9 \kappa^1}{2 \cdot 35}\right) C_{312} \\ G_{11} &= \lambda^4 A_{312}; G_{32} = \left(\frac{9 \kappa^4}{2 \cdot 35}\right) C_{312}; G_{41} = \frac{\lambda^4}{12} B_{412}; G_{51} = \lambda^4 A_{612}; G_{62} = \left(\frac{9 \kappa^4}{2 \cdot 35}\right) C_{612} \\ G_{71} &= \frac{\lambda^4}{12} B_{712}; G_{81} = \lambda^4 A_{912}; G_{92} = \left(\frac{9 \kappa^4}{2 \cdot 35}\right) C_{912}; G_{101} = \lambda^4 a_{1212}; G_{122} = \left(\frac{9 \kappa^4}{2 \cdot 35}\right) C_{1212} \end{aligned} \quad (\text{eq.13})$$

B.2 Matrices des conditions limites

Boundary conditions



At the edges

$$Cx_1 X'(x) + Cx_2 X(x) = Cx_3 Y^{0,1}(x) + Cx_4 Y^{4,5}(x) \quad (\text{eq.14})$$

$$Cx_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^1 A_{33} & 0 & 0 & e^2 A_{36} & 0 & 0 & -e^3 A_{39} & 0 & 0 & -e^4 A_{312} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^1 A_{36} & 0 & 0 & e^2 A_{66} & 0 & 0 & -e^3 A_{69} & 0 & 0 & -e^4 A_{612} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^1 A_{39} & 0 & 0 & -e^2 A_{69} & 0 & 0 & e^3 A_{99} & 0 & 0 & e^4 A_{912} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^1 A_{312} & 0 & 0 & -e^2 A_{612} & 0 & 0 & e^3 A_{912} & 0 & 0 & e^4 A_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{eq.15})$$

$$Cx_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{13} & -\frac{5e^1}{12} B_{23} & 0 & B_{34} & -\frac{5e^2}{12} B_{16} & 0 & -B_{37} & \frac{5e^3}{12} B_{19} & 0 & -B_{112} & \frac{5e^4}{12} B_{112} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{16} & -\frac{5e^1}{12} B_{16} & 0 & B_{46} & -\frac{5e^2}{12} B_{56} & 0 & -B_{67} & \frac{5e^3}{12} B_{59} & 0 & -B_{512} & \frac{5e^4}{12} B_{512} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{19} & \frac{5e^1}{12} B_{19} & 0 & B_{49} & \frac{5e^2}{12} B_{59} & 0 & -B_{79} & -\frac{5e^3}{12} B_{89} & 0 & B_{812} & \frac{-5e^4}{12} B_{812} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ B_{112} & \frac{5e^1}{12} B_{112} & 0 & B_{412} & \frac{5e^2}{12} B_{512} & 0 & -B_{712} & \frac{-5e^3}{12} B_{812} & 0 & B_{1012} & \frac{-5e^4}{12} B_{1112} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{eq.16})$$

$$Cx_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 - D_{31} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -D_{61} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{91} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_{121} & 0 \end{pmatrix} \quad Cx_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{31} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ E_{61} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -E_{91} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 - E_{121} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{eq.17})$$

Vertical crack across the third layer

$$Cx_{1fiss}X'(x) + Cx_{2fiss}X(x) = Cx_{3fiss}Y^{0,1}(x) + Cx_{4fiss}Y^{4,5}(x) \quad (\text{eq.18})$$

$$Cx_{1fiss} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^1A_{33} & 0 & 0 & e^2A_{36} & 0 & 0 & -e^3A_{39} & 0 & 0 & -e^4A_{312} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^1A_{36} & 0 & 0 & e^2A_{66} & 0 & 0 & -e^3A_{69} & 0 & 0 & -e^4A_{612} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^1A_{39} & 0 & 0 & -e^2A_{69} & 0 & 0 & e^3A_{99} & 0 & 0 & e^4A_{912} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^1A_{312} & 0 & 0 & -e^2A_{612} & 0 & 0 & e^3A_{912} & 0 & 0 & e^4A_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{eq.19})$$

$$Cx_{2fiss} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{13} & -\frac{5e^1}{12}B_{23} & 0 & B_{34} & -\frac{5e^2}{12}B_{16} & 0 & -B_{37} & \frac{5e^3}{12}B_{19} & 0 & -B_{112} & \frac{5e^4}{12}B_{112} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{16} & -\frac{5e^1}{12}B_{16} & 0 & B_{46} & -\frac{5e^2}{12}B_{56} & 0 & -B_{67} & \frac{5e^3}{12}B_{59} & 0 & -B_{512} & \frac{5e^4}{12}B_{512} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{19} & \frac{5e^1}{12}B_{19} & 0 & B_{49} & \frac{5e^2}{12}B_{59} & 0 & -B_{79} & -\frac{5e^3}{12}B_{89} & 0 & B_{812} & \frac{-5e^4}{12}B_{812} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ B_{112} & \frac{5e^1}{12}B_{112} & 0 & B_{412} & \frac{5e^2}{12}B_{512} & 0 & -B_{712} & \frac{-5e^3}{12}B_{812} & 0 & B_{1012} & \frac{-5e^4}{12}B_{1112} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{eq.20})$$

$$Cx_{3fiss} = Cx_3 ; Cx_{4fiss} = Cx_{4fiss} \quad (\text{eq.21})$$

B.3 Maillage pour scilab

Maillage progressif par zone / M4-5n – Cas 2D déformations planes

Logiciel utilisé : SCILAB

La structure est divisée en 4 zones (Figure 1).

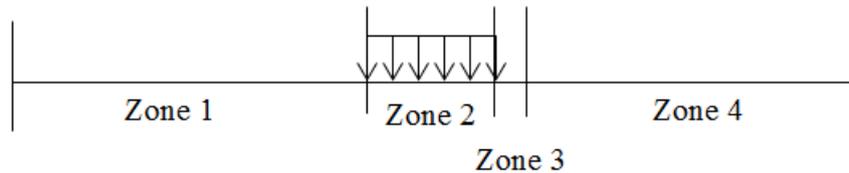


Figure 1 : Définition des quatre zones

La première zone correspond à la partie située avant la charge, la deuxième zone correspond à la charge, la troisième correspond à la fissure qui est située au bord droit de la charge et la quatrième zone correspond à la partie située après la fissure.

L'idée consiste à développer un programme sous SCILAB qui permet de générer un maillage spécifique pour chaque zone (Figure 2):

- Zone 1 : maillage dégressif (décroissant), c.à.d. la largeur des mailles décroît en allant du bord gauche au bord droit de la zone
- Zone 2 : maillage constant
- Zone 3 : deux mailles consécutives pour définir la fissure (afin d'introduire les conditions limites des bords libres entre deux nœuds consécutifs pour les M4-5n)
- Zone 4 : maillage progressif (croissant), c.à.d. la largeur des mailles croît en allant du bord gauche au bord droit de la zone



Figure 2 : L'idée du maillage par zone

Le maillage est choisi de cette manière car on veut que le calcul soit plus précis dans les zones de la charge et de la fissure afin de bien visualiser leurs effets sur le comportement de la structure.

L'avantage du maillage par zone c'est qu'il permet de bien localiser la fissure et éviter le décalage des nœuds.

Création du maillage des différentes zones

I. Zone 1 et Zone 4

Les données d'entrées nécessaires pour ce maillage sont : les coordonnées des deux extrémités de chaque zone (la longueur de la zone est déduite à partir de ces deux paramètres),

le nombre de nœuds voulus pour chaque zone et une formule permettant de calculer les coordonnées des nœuds et la raison pour déterminer le pas de progression pour les zones du maillage progressif.

Plusieurs méthodes sont testées afin de choisir celle qui est la plus adaptée pour chaque zone.

Méthode 1 (Guillo/Pouteau):

Cette méthode consiste à définir la longueur de la zone (L), la longueur de la première maille U(1), le nombre total de nœuds (N) et la raison (r>1).

$$\begin{cases} U(i) = r * U(i - 1) \\ x(N - i) = L - U(i) \end{cases} \quad (1)$$

Le premier nœud x(N) et le dernier nœud x(1) sont fixes. Les abscisses des nœuds x(i) (i ∈ {2, N-2}) sont calculés en retranchant la longueur de la maille de la longueur totale de la zone. Les nœuds sont obtenus de droite à gauche (x(N-1), x(N-2), ..., x(2)).

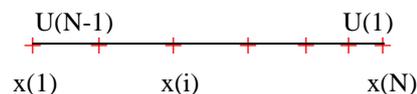


Figure 3 : Maillage obtenu en utilisant la méthode 1

L'avantage de cette méthode c'est qu'elle permet de préciser la longueur de la première maille U(1). L'inconvénient c'est qu'elle génère les nœuds d'une manière décroissante (de droite à gauche).

Quand la raison r augmente, le maillage devient plus grossier.

Cette méthode peut être utilisée pour la première zone. Elle ne peut pas être utilisée pour la zone 4, car si on veut faire un maillage progressif de gauche à droite, la formule ne dépend plus de L ($x(i) = x(i - 1) + U(i)$).

Méthode 2:

Cette méthode consiste à créer les nœuds x(i) d'une manière croissante (de gauche à droite) pour les zones 1 et 4. Le maillage dépend de la longueur de chaque zone (L), nombre de nœuds total de chaque zone (N) et de la raison (r).

Deux formules peuvent être utilisées :

1. Formule utilisée par Guillo / Pouteau

$$x(i) = (i - 1)^r * \frac{L}{(N-1)^r} \quad (2)$$

Dans cette formule, on fixe l'abscisse du premier nœud x(1) et on calcule l'abscisse des nœuds x(i) (i ∈ {2, N}).

L'avantage de cette formule c'est qu'elle permet de créer un maillage progressif et dégressif et cela en changeant la valeur de la raison r :

- si $0 < r < 1$, on obtient un maillage dégressif, utilisé pour la zone 1. Quand r augmente, le maillage devient plus grossier.
- si $r > 1$, on obtient un maillage progressif, utilisé pour la zone 4. Quand r augmente, le maillage devient plus fin.

L'inconvénient de cette formule c'est qu'on ne peut pas fixer la largeur de la première maille (comme dans la méthode 1). En plus, elle ne permet pas de calculer les abscisses des nœuds, elle permet de calculer les longueurs cumulées seulement (ce problème peut être réglé en ajoutant $x(1)$ à la formule).

2. Formule utilisée par Guillo / Tran

$$x(i) = x(i - 1) + L * r^{(i-2)} * \frac{1-r}{1-r^N} \quad (3)$$

Dans cette formule, on fixe l'abscisse du premier nœud $x(1)$ et du dernier nœud $x(N)$ et on calcule l'abscisse des nœuds $x(i)$ ($i \in \{2, N-1\}$).

L'avantage de cette formule c'est qu'elle permet de calculer les abscisses des nœuds et pas la longueur de la maille. Elle permet aussi de créer un maillage progressif et dégressif et cela en changeant la valeur de la raison r :

- si $0 < r < 1$, on obtient un maillage dégressif, utilisé pour la zone 1. Quand r augmente, le maillage devient plus grossier.
- si $r > 1$, on obtient un maillage progressif, utilisé pour la zone 4. . Quand r augmente, le maillage devient plus fin.

L'inconvénient de cette formule c'est qu'on ne peut pas fixer la largeur de la première maille (comme dans la méthode 1).

La formule 3 peut s'écrire sous la forme explicite suivante :

$$\begin{cases} l(i - 2) = L * \frac{r^{i-2}}{1+\dots+r^{N-1}} = L * r^{i-2} * \frac{1-r}{1-r^N} & i \in \{3, N - 2\} \\ x(i) = x(i - 1) + l(i - 2) & i \in \{2, N - 1\} \end{cases} \quad (4)$$

Avec $l(i)$ représente la longueur d'une maille i et $x(i)$ l'abscisse du nœud i . On rappelle que la longueur d'une maille est la distance entre deux nœuds consécutifs c.à.d. la différence des deux coordonnées adjacentes.

Après la présentation des avantages et des inconvénients de chacune des deux méthodes, la méthode 2 est plus simple à utiliser car elle peut être appliquée pour les deux zones 1 et 4 et cela en changeant la valeur de la raison r . Il reste à faire un choix entre les deux formules

présentées. La formule 2 semble plus efficace puisqu'on fixe les deux extrémités de la zone $x(1)$ et $x(N)$ et elle permet de calculer directement les abscisses des nœuds.

II. Zone 2

Le maillage dans cette zone est régulier. Les données d'entrées sont les abscisses des deux extrémités ($x(1)$ et $x(N)$) et le nombre de nœuds (N). La formule utilisée est la suivante :

$$x(i) = x(i - 1) + \frac{L}{N-1} \quad (i \in \{2, N-1\}) \quad (5)$$

III. Zone 3

La zone 3 est la zone de la fissure qui est représenté par une seule maille. Les données d'entrées sont les abscisses des deux nœuds de la maille qui sont distants de la largeur de la fissure l_f .

Application et validation

Le maillage par zone est testé sur un exemple déjà étudié (longueur du quadricouche=20m, longueur du chargement situé au centre du quadricouche=0.15m, largeur de la fissure située au bord droit de la charge dans la troisième couche=0.001m).

Le maillage déjà utilisé est un maillage régulier de 0.001m de largeur (pour qu'on puisse introduire la fissure). Alors le nombre total de nœuds utilisé est 20001 nœuds. Le temps nécessaire pour le calcul est 2165 s CPU.

Pour le maillage par zone, nous avons choisi les données d'entrées suivantes :

- nombre de nœuds de la première zone $N1=56$
- nombre de nœuds de la deuxième zone $N2=80$
- nombre de nœuds de la troisième zone $N3=2$
- nombre de nœuds de la quatrième zone $N4=66$
- raison de la première zone $r1=0.9$
- raison de la deuxième zone $r2=0$
- raison de la troisième zone $r3=0$
- raison de la quatrième zone $r4=1.12$

Alors le nombre total de nœuds est égal à 201 nœuds. Le temps de calcul est 0.364 s CPU (PS : c'est le même maillage utilisé pour la modélisation en E.F. sur Cesar LCPC cleo 2D).

Une comparaison des résultats au niveau des déplacements horizontaux et verticaux, des contraintes de cisaillement et d'arrachement ainsi que des rotations a été réalisée. Nous avons obtenu les mêmes résultats pour les deux maillages. Nous présentons ici, comme exemple, la variation de la contrainte de cisaillement le long de la structure entre la troisième et la quatrième couche (Figure 4). La courbe rouge représente la variation de la contrainte de cisaillement pour le maillage par zone décrit ci-dessus et la courbe verte pointillée représente la variation de ce critère en utilisant un maillage régulier uniforme.

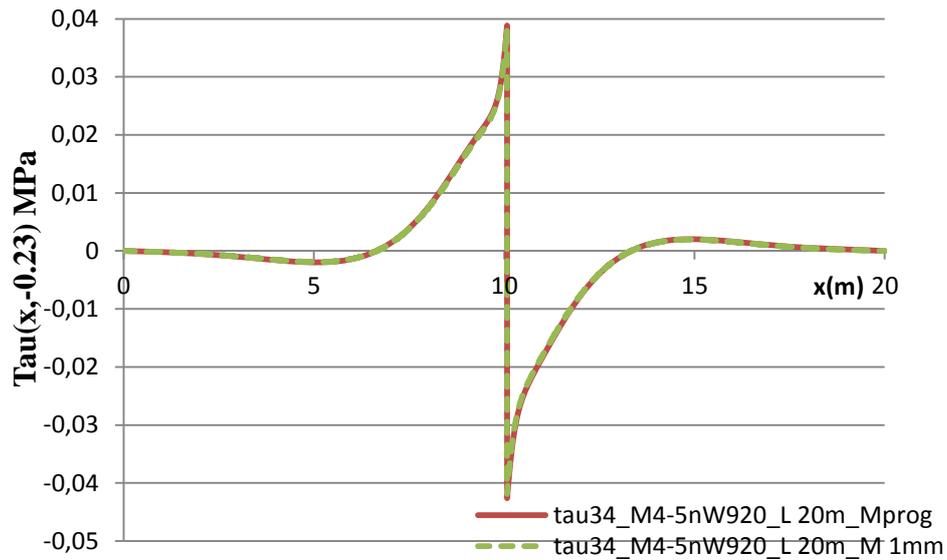


Figure 4 : Comparaison des deux maillages testés

Conclusion

Avec le maillage par zone, le calcul est précis et beaucoup plus rapide (dans l'exemple étudié : 5948 fois plus rapide). En plus, le problème de décalage de la fissure est réglé.

Résumé du principe du maillage

- 1- Définition des 4 zones (les coordonnées)
- 2- Choix du type de maillage de chaque zone (régulier, progressif,...)
- 3- Choix du nombre de nœuds de chaque zone
- 4- Choix de la formule et de la raison utilisées pour chaque zone

```

////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
//
//
//
//      Création d'un maillage progressif par zone cas 2D déformations planes (on a 4 zones :
// zone 1 c'est la zone située avant la charge, la formule de guillo/Tran pour le calcul (c<1)
// zone 2 c la zone de la charge avec un maillage régulier,
// zone 3 c la zone de la fissure, je fixe deux points et la distance entre eux est égale à la largeur de la
// fissure
// zone 4 c la zone située après la fissure, calculée avec la meme formule que celle de la zone 1(c>1)) //
//
//      Hanan Nasser - 13/02/15 – IFSTTAR / MAST/ LAMES
//
////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
// test

//Données d'entrée :
//coord : liste contenant les coordonnées des extrémités des 4 zones de la structure. Elle contient 5
//éléments. Le 4ème élément, qui correspond à l'abscisse de l'extrémité droite de la fissure dépend de la
//largeur de la fissure.
//raison : liste contenant la raison de chaque zone. Elle contient 4 éléments. (Pour les zones 2 et 3, la
//raison ne joue aucun role, donc on peut mettre n'importe quelle valeur).
//nœuds : liste contenant le nombre de nœuds de chaque zone. Elle contient éléments.(Pour la zone 3, il faut
//toujours mettre la valeur 2 puisque cette zone est formée de deux nœuds seulement)

//Variables utilisées dans le programme
//xz1 : liste vide qui sert à stocker les abscisses des nœuds de la zone 1
//xz2 : liste vide qui sert à stocker les abscisses des nœuds de la zone 2
//xz3 : liste vide qui sert à stocker les abscisses des nœuds de la zone 3
//xz4 : liste vide qui sert à stocker les abscisses des nœuds de la zone 4
//t : compteur des zones. t=1, 2, 3 et 4
//N : nombre de nœuds de chaque zone
//x1 : x(1) de chaque zone
//x2 :x(N) de chaque zone
//r : raison de chaque zone
//L: longueur de chaque zone ( =x2-x1)
//i : compteur des nœuds de chaque zone

```

```

coord=[0,3,5,6,10]; //coordonnées de chaque zone
raison=[0.4,0,0,1.04]; //raison de chaque zone
noeuds=[5,4,2,5]; // nombre de nœuds de chaque zone

```

```

xz1=[];
xz2=[];
xz3=[];
xz4=[];

```

```

t=1; // zone 1
x1=[coord(t)];
x2=[ coord (t+1)];
r=[raison(t)];
N=[noeuds(t)];
L=x2-x1;
x(1)=x1;
for i=2:N-1,
    x(i)=x(i-1)+r^(i-2)*L*(1-r)/(1-r^N),

```

```

end
x(N)=x2;
xz1=union(xz1,x);//x est la réunion de tous les intervalles x12

t=2;// zone2
x1=[coord(t)];
x2=[ coord (t+1)];
r=[raison(t)];
N=[noeuds(t)];
x(1)=x1;
L=x2-x1;
for i=2:N-1,
    x(i)=x(i-1)+L/(N-1),
end
xz2=union(xz2,x);//x est la réunion de tous les intervalles x12

xz12=union(xz1,xz2);

t=3;// zone3
x1=[coord(t)];
x2=[ coord (t+1)];
N=[noeuds(t)];
x(1)=x1;
x(2)=x2;
xz3=union(xz3,x);

t=4;// zone4
x1=[coord(t)];
x2=[ coord (t+1)];
r=[raison(t)];
N=[noeuds(t)];
L=x2-x1;
x(1)=x1;
for i=2:N-1,
    x(i)=x(i-1)+r^(i-2)*L*(1-r)/(1-r^N),
end
x(N)=x2;
xz4=union(xz4,x);//x est la réunion de tous les intervalles x12

xz34=union(xz3,xz4);

X=union(xz12,xz34);

```

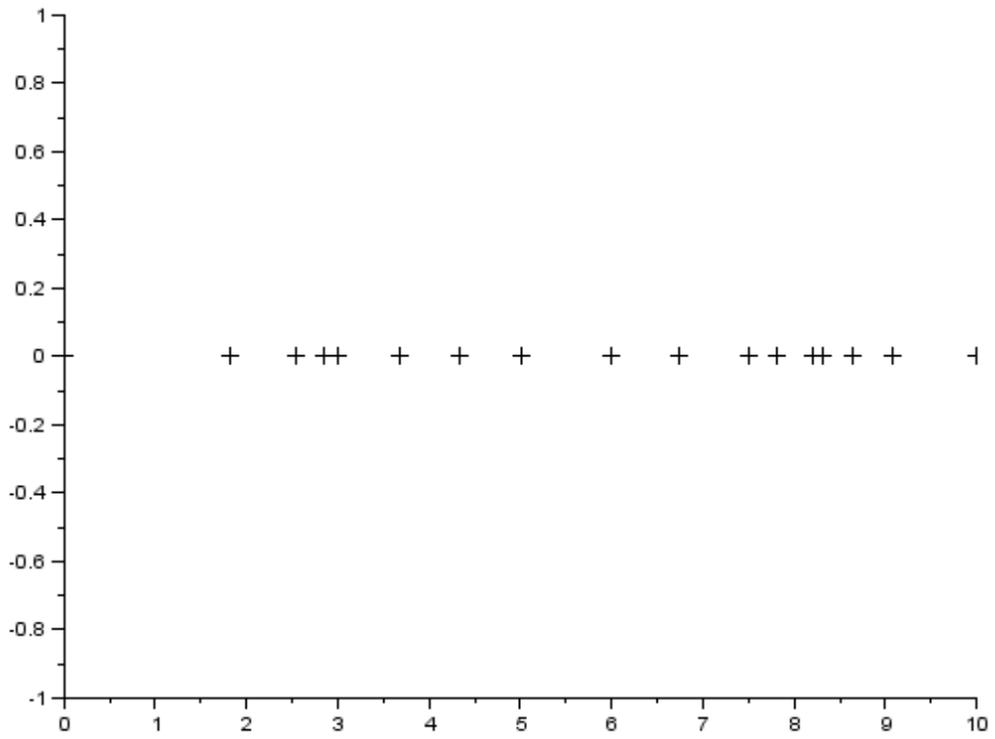


Figure 5 : maillage obtenu pour l'exemple testé sous scilab

Thèse de Doctorat

Hanan Nasser

Méthode de résolution du M4-5n par éléments finis mixtes pour l'analyse des chaussées avec discontinuités

Solving M4-5n by a Mixed Finite Element method for the analysis of pavements with discontinuities

Résumé

Les chaussées subissent des sollicitations liées au trafic et au climat conduisant à leur dégradation, par fissuration notamment. Il est nécessaire dans le contexte actuel de pouvoir modéliser le comportement de ces structures multicouches endommagées afin de prévoir leur durée de vie résiduelle ou dimensionner des solutions de renforcement. L'objectif de la thèse est ainsi de proposer un outil de calcul dédié à l'analyse 3D des chaussées fissurées ou comportant des discontinuités.

L'approche retenue repose sur la modélisation simplifiée d'une chaussée par un empilement de plaques du Modèle Multi-particulaire des Matériaux Multicouches à 5n équations d'équilibre (M4-5n). Un outil de calcul rapide de référence de chaussées 2D fissurées et une méthode de résolution générale du M4-5n par Eléments Finis mixtes sont développés. Le point de départ de la méthode de résolution est l'écriture, pour le M4-5n, du principe variationnel basé sur le théorème de l'énergie complémentaire où la condition de contraintes statiquement admissibles est assurée à partir de multiplicateurs de Lagrange. La discrétisation des efforts généralisés utilise des espaces d'interpolation permettant le bon conditionnement du système d'équations algébriques à résoudre et garantissant la stabilité de la solution. La méthode est implémentée dans FreeFem++. Elle ramène le problème 3D initial à une modélisation EF 2D et conduit à des valeurs finies des efforts généralisés au niveau des fissures ou décollement d'interface.

L'outil de calcul final ainsi développé est validé et appliqué à l'étude de la réponse d'une structure fissurée, représentative d'une chaussée testée en vraie grandeur sur le site de l'IFSTTAR.

Mots-clés

Chaussée, Structure Multicouche, M4-5n, Eléments Finis Mixtes, Fissuration, Décollement

Abstract

Pavements are multilayer structures which undergo cracking distress due to traffic and climatic factors.

It is important nowadays to be able to model the mechanical response of such damaged pavements in order to assess their residual lifetime or to design reinforcement solutions. In this context, the present thesis aims at developing a numerical tool dedicated to the analysis of pavements incorporating cracks or discontinuities.

In the developed approach, the pavement structure is modeled as a stacking of "plate" elements of type M4-5n (Multi-Particle Models of Multilayer Materials) which considers 5n equilibrium equations. A reference quick 2D calculation tool for cracked pavements and a general solving of M4-5n by the mixed Finite Element (FE) method was developed. The starting point for this method is the derivation for M4-5n of the variational principle based on the complementary energy theorem whose condition of statically admissible stress is taken into account using Lagrange multipliers. Discretization of the generalized stresses involves interpolation spaces, proposed to avoid ill-conditioned system of algebraic equations after discretization and to insure stability of the solution. The developed method is implemented in a FreeFem++ script. In this method, the initial 3D problem can be handled through FE simulations in 2D and finite values of the generalized stresses are obtained at crack and interlayer debonding locations.

The developed numerical tool was validated and applied to the study of the mechanical response of a structure with cracks representative of a pavement tested under full-scale conditions during an accelerated fatigue test performed at IFSTTAR.

Key Words

Pavement, Multilayer Structure, M4-5n, Mixed Finite Elements, Cracking, Debonding